臺北市 103 學年度
普通型高級中等學校數學及自然學科能力競賽
(數學科口試參考解答)

【試題一】當三正整數a,b,c滿足$a^2+b^2=c^2$時，稱a,b,c為一組畢氏三元數；又當a,b,c為一組畢氏三元數且其最大公因數為 1，則稱a,b,c為一組本原畢氏三元數。

(1) 當a,b,c為本原畢氏三元數，已知存在二正整數$m>n$，使得

$(a,b)=(m^2-n^2,2mn)$或$(2mn,m^2-n^2)$而$c=m^2+n^2$。

試解說此時m,n互質且其奇偶性相反。

(2) 當a,b,c為任一組畢氏三元數，是否存在二正整數p,q且$p>q$使得

$$(a,b)=(p^2-q^2,2pq)\text{ 或 }(2pq,p^2-q^2),c=p^2+q^2?$$

【參考解答】

(1) 反證：

a. 若$(m,n)=d>1$, 則d^2可同時整除a,b,c；$d^2>1$違背a,b,c的最大公因數為 1, 得知m,n互質。

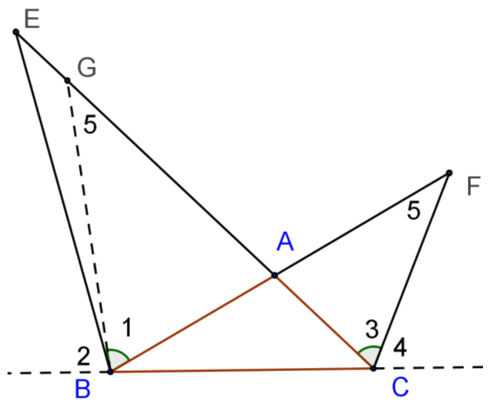
b. 若m,n同奇或同偶，則可得 2 可同時整除a,b,c；此與a,b,c的最大公因數為 1 違背！故知m,n為一奇一偶。

(2) 不一定存在，例如 9,12,15 為畢氏三元數組就無法寫成p^2-q^2，$2pq$，p^2+q^2的形式。事實上任一本原畢氏三元數組，非平方數的奇數倍數，如 15,20,25 或 15,36,39 等等都無法表成p^2-q^2，$2pq$，p^2+q^2的形式。

【**試題二**】ΔABC 中，$\angle B$ 與 $\angle C$ 為其二內角。點 E 在射線 $\overrightarrow{CA}$ 上且 $\overline{BE}$ 平分 $\angle B$ 的一個外角；點 F 在射線 $\overrightarrow{BA}$ 上且 $\overline{CF}$ 平分 $\angle C$ 的一個外角。

試證：若 $\angle B < \angle C$，則 $\overline{BE} > \overline{CF}$。

【**參考解答**】



已知：$\angle 1 = \angle 2$，$\angle 3 = \angle 4$，$\angle B < \angle C$，

知 $\angle 1 > \angle 3$. 可在 $\angle 1 = \angle ABE$ 的內部作 $\angle ABG = \angle 3$，其中 G 為 $\overline{AE}$ 內部上的一點。可得 $\angle AGB = \angle AFC = \angle 5$. 進一步得 $\Delta ABG \sim \Delta ACF$，再由 $\angle B < \angle C$，得 $\overline{AB} > \overline{AC}$,進而得

$\overline{BG} > \overline{CF} \cdots\cdots\cdots(1)$

再由 $\angle 4 < 90^{\circ}$ 且 $\angle 4 > \angle 5$，故

$\angle AGB = \angle 5 < 90^{\circ}$，於是 $\angle BGE > 90^{\circ}$. 在 ΔBGE 中，$\angle BGE$ 為鈍角，故 $\overline{BE}$ 為其最長邊，即得

$\overline{BE} > \overline{BG} \cdots\cdots\cdots(2)$

由(1)(2)得證 $\overline{BE} > \overline{CF}$.