103學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（台南區） 筆試（二）{參考解答}

一、已若 ΔABC 的三邊長滿足 $\overline{BC}^2-\overline{BC}-2\overline{AB}=2\overline{CA}$ 和 $2\overline{AB}-\overline{BC}-2\overline{CA}=3$，

求證 $\overline{AB}>\overline{BC}>3$.

【參考解答】:

令 $a=\overline{BC},b=\overline{CA},c=\overline{AB}$

所以原條件可化成

$$\begin{cases}2b+2c=a^2-a\cdots\cdots\cdots(1)\\2b-2c=-a-3\cdots\cdots\cdots(2)\end{cases}$$

(1)+(2) 得 $b=\dfrac{1}{4}(a^2-2a-3)=\dfrac{1}{4}(a-3)(a+1)\cdots\cdots\cdots(3)$

(1)－(2) 得 $c=\dfrac{1}{4}(a^2+3)\cdots\cdots\cdots(4)$

因為 $b>0$，所以由(3)知 $\overline{BC}=a>3\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$

再由(4)和(5)得

$$c-a=\frac{1}{4}(a^2-4a+3)=\frac{1}{4}(a-3)(a-1)>0$$

$\Rightarrow\quad c>a\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$

所以由(5)和(6)知 $c>a>3$， 即 $\overline{AB}>\overline{BC}>3$

二、已知 A,B,C 三人各有巧克力若干條，首先由 A 贈送 B,C 二人與 B,C 原有數量相同的巧克力；再由 B 贈送 A,C 二人與 A,C 目前數量相同的巧克力；最後由 C 贈送 A,B 二人與 A,B 目前數量相同的巧克力，C 贈送完後，A,B,C 三人的巧克力條各有 128 條。問原來 A,B,C 三人各有幾條巧克力？

【參考解答】：設 A,B,C 原來各有 x,y,z 條巧克力

	A	B	C
原有	x	y	z
第 1 次贈送後	$x-y-z$	$2y$	$2z$
第 2 次贈送後	$2(x-y-z)$	$2y-(x-y-z)-2z$	$4z$
第 3 次贈送後	$4(x-y-z)$	$4y-2(x-y-z)-4z$ $=-2x+6y-6z$	$4z-2(x-y-z)-[2y(x-y-z)$ $-2z]=-x-y+7z$

$$\Rightarrow \begin{cases} 128=4(x-y-z) \\ 128=4y-2(x-y-z)-4z=-2x+6y-6z \\ 128=4z-2(x-y-z)-[2y-(x-y-z)-2z]=-x-y+7z \end{cases}$$

$Ans:A$有208條，B有112條，C有64條

三、設 n 為正整數且其正因數的個數恰有 30 個，若 7, 9 及 25 皆為 n 的因數，則 n 的可能值有幾個？

【參考解答】$n=2^{a_1}3^{a_2}5^{a_3}7^{a_4}\cdots p_n^{a_n}$ （質因數的乘績）

$(a_1+1)(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)\cdots\cdots(a_n+1)=30$

$a_2+1\geq 3$，$a_3+1\geq 3$，$a_4+1\geq 2$

所以 $(a_2+1)(a_3+1)(a_4+1)=30$

解得 $a_2=2$，$a_3=4$，$a_4=1$ 或 $a_2=4$，$a_3=2$，$a_4=1$

$a_2=3$ 不可能，因為 30 非 4 的倍數

$a_2=5$ 不可能，因為 $(a_3+1)(a_4+1)=5$ 不可能

同理 $a_2>5$ 不可能

其他不可能，故 2 個

四、實數 α 與 β 滿足方程式 $\alpha^3-3\alpha^2+5\alpha=4$ 及 $\beta^3-3\beta^2+5\beta=2$，求 $\alpha+\beta=?$

【參考解答】$x^3-3x+5x-3=(x-1)^3+2(x-1)$

令 $f(t)=t^3+2t$，則 $f(\alpha-1)=1$，$f(\beta-1)=-1$

因為 f 為奇函數，故 $\alpha+\beta=2$