

103 學年度台灣省北二區（新竹高中）

普通型高級中等學校數理及資訊學科能力競賽

數學科筆試（一）試題 參考答案

問題一：已知 E 、 F 、 G 、 H 分別為正方形 $ABCD$ 四邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{BC}$ 、 $\overline{CD}$ 、 $\overline{DA}$ 上的點。

(1) 若 $\overline{EG} \perp \overline{FH}$ ，試證 $\overline{EG} = \overline{FH}$ 。 (10 分)

(2) 若僅給定 E 、 F 、 G 、 H 四點，試以尺規作圖作出此正方形 $ABCD$ （寫出作法並證明之）。 (6 分)

【解答】：

(1) ① 過 A 點作 $\overline{EG}$ 平行線交直線 DC 於 G' 點，
且過 D 點作 $\overline{HF}$ 平行線交直線 BC 於 F' 點。

② $\triangle ADG' \cong \triangle DCF'$ ，故 $\overline{AG'} = \overline{DF'}$

③ $\overline{EG} = \overline{AG'} = \overline{DF'} = \overline{HF}$ 。

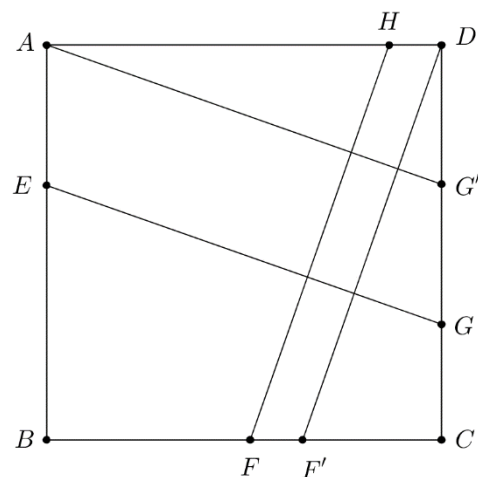
(2) ① 作 $\overline{FH'} \perp \overline{EG}$ 且 $\overline{FH'} = \overline{EG}$ 。

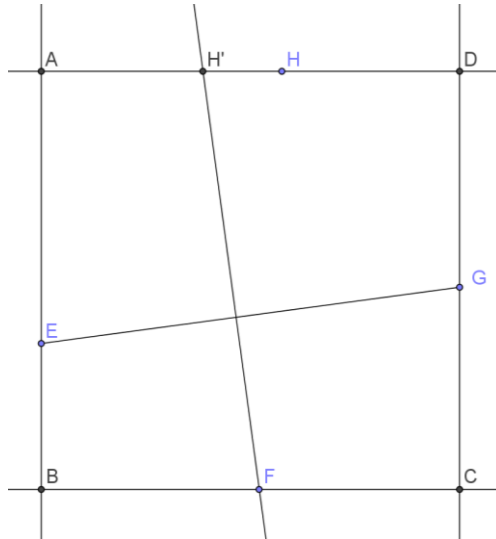
② 作 $\overline{EA} \perp \overline{HH'}$ 交 $\overline{HH'}$ 於 A 點，

③ 作 $\overline{FB} \perp \overline{EA}$ 交 $\overline{EA}$ 於 B 點，

④ 作 $\overline{GC} \perp \overline{FB}$ 交 $\overline{FB}$ 於 C 點，交 $\overline{HH'}$ 於 D 點，

⑤ 正方形 $ABCD$ 即為所求。





問題二：設實數 $a, b, c \geq 0$ 且滿足 $a + b + c = 1$ ，試證： $ab + bc + ca - 2abc \leq \frac{7}{27}$ 。

(16 分)

【證明】：

不失一般性可設 $a \geq b \geq c$ ，根據條件 $a + b + c = 1$ ，可知

$$a \geq \frac{1}{3} \geq c, \quad a + b \geq \frac{2}{3}$$

因此可令

$$\begin{cases} a + b &= \frac{2}{3} + t \\ c &= \frac{1}{3} - t \end{cases}$$

其中 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}$ 。

利用上述條件可推得

$$\begin{aligned}
& ab+bc+ca-2abc \\
= & c(a+b)+ab(1-2c) \\
\leq & c(a+b)+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2(1-2c) \\
= & \left(\frac{1}{3}-t\right)\left(\frac{2}{3}+t\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{t}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}+2t\right) \\
= & \frac{7}{27}-\frac{t^2}{4}+\frac{t^3}{2} \\
= & \frac{7}{27}-\frac{t^2}{2}\left(\frac{1}{2}-t\right) \\
\leq & \frac{7}{27}
\end{aligned}$$

當 $t=0$ 時，等號成立，故得證。

問題三：將一圓用 n 條直徑等分成 $2n$ 個扇形，任選其中 n 個塗紅色，另 n 個塗藍色。將紅色扇形與藍色扇形分別編號如下：紅色扇形從某一個起依順時針順序寫上 $1, 2, \dots, n$ ，藍色扇形從某一個起依逆時針順序寫上 $1, 2, \dots, n$ 。證明存在一個半圓，出現 $1, 2, \dots, n$ 的每一個數。 (17 分)

【證明】：

對於每一個 $i=1, 2, \dots, n$ ，計算紅 i 和藍 i 之間的劣弧距離，選 i 使得此距離為最小，稱此劣弧稱為 H_i 。

首先說明 H_i 內部（即紅 i 和藍 i 兩點不算）的所有點都必須同色，用反證法：若非，因為紅藍一順一逆向，必能在 H_i 內找到一紅一藍足碼更大，此時此更大足碼的兩點構成的劣弧距離更短，與 i 的選取矛盾。

不妨設 H_i 內部的點都與左端點 i 同色，則 H_i 和 a 的分界直徑 L 即為所求。

證明如下：

(i) 若 i 是紅色，則由寫數的規則， L 向右的紅色數字為 $i+1, i+2, \dots$ ，藍色數字為 $i, i-1, \dots$ 。因為共有 n 個數，所以 $\bmod n$ 恰好為一個完全剩餘系，亦即半圓中 $1, 2, \dots, n$ 各出現一次。

(ii) 若 i 是藍色，則同樣由寫數規則， L 向右的藍色數字為 $i, i-1, \dots$ ，紅色數字是 $i+1, i+2, \dots$ 。理由同上，因為共有 n 個數，所以 $\bmod n$ 恰好為一個完全剩餘系，亦即半圓中 $1, 2, \dots, n$ 各出現一次。