新北市數學能力競賽-筆試(一) 參考答案

【問題一】

證明：對任意正實數a,b,c，不等式

$$\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{3}ab}+\sqrt{b^2+c^2-bc}+\sqrt{c^2+a^2-\sqrt{3}ca}\geq\sqrt{3}a$$

恆成立，並給出等號成立的充要條件。

(12 分)

【參考解答】

在坐標平面上取O為原點，$\overline{OA}=\overline{OD}=a$、$\overline{OB}=b$、$\overline{OC}=c$，且$\angle AOB=\angle COD=30^\circ$，

$\angle BOC=60^\circ$。由餘弦定理可知$\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2-\sqrt{3}ab}$，$\overline{BC}=\sqrt{b^2+c^2-bc}$，

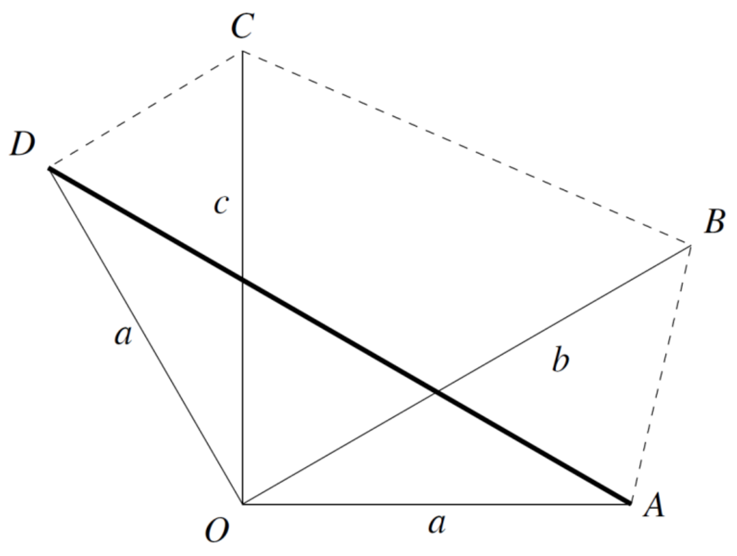
$\overline{CD}=\sqrt{c^2+a^2-\sqrt{3}ca}$。

由三角不等式知$\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}\geq\overline{AD}$。由$\angle AOD=\angle AOB+\angle BOC+\angle COD=120^\circ$，知

$$\overline{AD}=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=\sqrt{3}a$$

得證。

等號成立的充要條件為A,B,C,D四點共線，故調整a,b,c之比例即可得到。 □



【問題二】

假設 A 為一個三位數，且 A 的百位數、十位數、與個位數分別為 a,b,c ，且方程式

$ax^2+bx+c=0$ 有有理根，證明 A 不是質數。

(12 分)

【參考解答】

由根與係數關係知，此兩有理根 x_1，x_2 皆為負。

$A=a(10-x_1)(10-x_2)$ ，兩邊同乘以 a 得 $aA=(10a-x_1a)(10a-x_2a)$ 。

若 A 是質數，不失一般性，設 $A\,|\,(10a-x_1a)$ ，所以 $A\le(10a-x_1a)$ 。

所以 $a\ge(10a-x_2a)$ ，推得 $9a\le x_2a<0$ ，矛盾。

【問題三】

若正有理數 m 可以表成 $m=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c$，其中 a,b,c 為整數，則稱 m 為**金元數**。試問從集合 $S=\left\{\frac{k}{30^r}\ \middle|\ k,r\text{為正整數}\right\}$ 中最多可以找出幾個不同元素，使得這些元素中相異兩數 p,q 都滿足 $|p-q|$ 為金元數？

(12 分)

【參考解答】

設 A 表金元數所成集合，而 S 的子集 B 滿足：相異兩數 p,q 恆有 $|p-q|\in A$。

先證明：$|B|\le 7$。 假設 $|B|\ge 8$，並任取其中 8 個數，再同乘 30^s (足夠大的 s) 成為 8 個正整數。由鴿籠原理，這 8 個正整數中必有兩數 $u>v$ 的差是 7 的倍數。令 $u-v=7k$，且 $u=30^s a, v=30^s b$，其中 $a,b\in B\subset S$。於是，

$$|a-b|=\left|\frac{u-v}{30^s}\right|=\frac{7k}{30^s}\notin A \quad \text{(因 7 不是 30 的因數)。}$$

此與 $|a-b|\in A$ 矛盾，故 $|B|\le 7$。

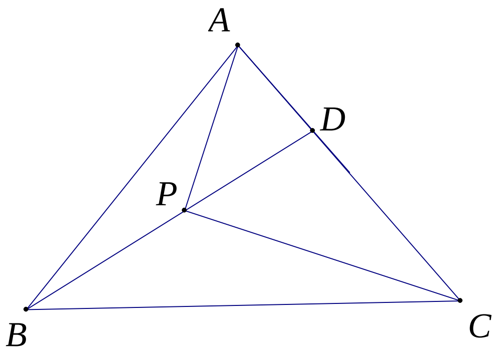
另一方面，檢驗易知子集 $B=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ 滿足條件；故所求滿足條件的元素個數最大值為 7。

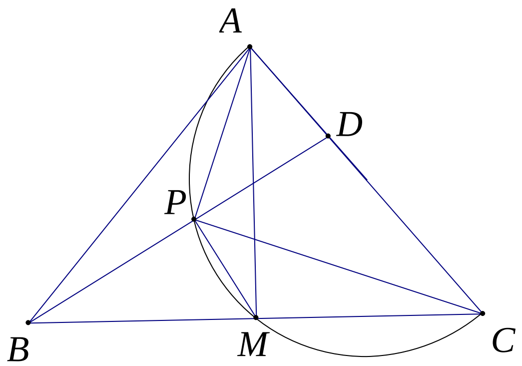
【問題四】

ΔABC 中 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$，$\overline{BC}=6$，而 D 為 $\overline{AC}$ 上的一點。設 P 為 $\overline{BD}$ 上的一點使得 $\angle APC=90^\circ$，且 $\angle ABP=\angle BCP$，如圖所示。求 $\dfrac{\overline{DC}}{\overline{AD}}$ 之值？

(13 分)

【參考解答】





從頂點 A 向 $\overline{BC}$ 作垂線，垂足為點 M. 由於 $\overline{AB}=\overline{AC}=5$，所以 $\overline{BM}=\overline{MC}=3 \Rightarrow \overline{AM}=4$. 設 $\angle ABP=\angle BCP=\alpha$，$\angle ACP=\theta$，則由 $\angle ABC=\angle ACB$ 可知 $\angle PBC=\theta$. 以 $\overline{AC}$ 為直徑向三角形內部畫一半圓，則 A、P、C、M 四點都在此半圓上，且 $\angle PAM=\angle PCM=\alpha$，$\angle AMP=\angle ACP=\theta$；因此 $\Delta MPA \sim \Delta BPC$. 由此可得

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\frac{\overline{MA}}{\overline{BC}}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \Rightarrow \tan\theta=\frac{\overline{PA}}{\overline{PC}}=\frac{2}{3}.$$

考慮 ΔBDC，由正弦定理，$\dfrac{\overline{DC}}{\sin\theta}=\dfrac{\overline{BC}}{\sin\angle BDC}$

$$\begin{aligned}
\overline{DC} &= \frac{6\sin\theta}{\sin(180^\circ-\theta-\angle DCB)}=\frac{6\sin\theta}{\sin(\theta+\angle DCB)} \\
&= \frac{6\sin\theta}{\sin\theta\cos\angle DCB+\cos\theta\sin\angle DCB} \\
&= \frac{6}{\cos\angle DCB+\cot\theta\sin\angle DCB} \\
&= \frac{6}{\frac{3}{5}+\frac{3}{2}(\frac{4}{5})}=\frac{10}{3}
\end{aligned}$$

$$\overline{AD}=5-\frac{10}{3}=\frac{5}{3} \Rightarrow \frac{\overline{DC}}{\overline{AD}}=2.$$