103學年度高級中學數學學科能力競賽

嘉義區複賽試題（二）【解答】

一、【解】

題目要求$n+11$整除n^3+103.考慮以$n+11$為模。此時

$n\equiv -1\,(\text{mod } n+11)$, 而且

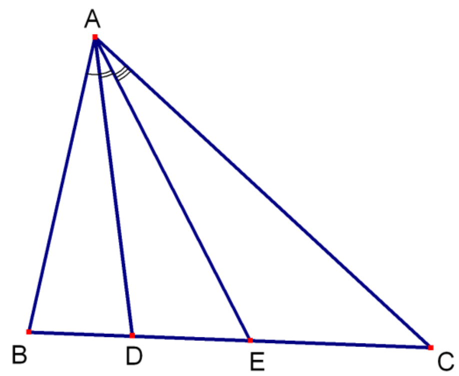
$$n^3+103\equiv(-11)^3+103\equiv -1228\equiv 0\,(\text{mod } n+11).$$

所以$n+11$為$1228\equiv 0\,(\text{mod } n+11)$. 所以$n+11$為$1228$的正因數，

故可能為$1,2,4,307,614,1228.$

得$n=296,603,$ 或$1217.$ 故$n=1217$為所求的最大整數。

二、【解】



令$AB=c, AC=b,\quad DE:EC=3:x.$則

$$\frac{BE}{EC}=\frac{c\sin 2\theta}{b\sin\theta}=\frac{2c\cos\theta}{b},\ \frac{BD}{DC}=\frac{c\sin\theta}{b\sin 2\theta}=\frac{c}{2b\cos\theta}.$$

因此 $\dfrac{c^2}{b^2}=\dfrac{BE}{EC}\cdot\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{5}{x}\cdot\dfrac{2}{(x+3)}$. 得$x(x+3)=90$即$(x+\frac{3}{2})^2=\frac{369}{4}$.

故$x=\frac{3}{2}(\sqrt{41}-1)$, $DE:EC=2:(\sqrt{41}-1)$.

三、【解】

解法一：設x為其期望值則$x=\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times(2+x)$,

可得$x=\frac{5}{2}$.

解法二：

$$\begin{aligned}x&=\frac{1}{3}\times 1+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 2+\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 3+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\right)^2\times 4+\cdots\\&=\frac{1}{3}\times\left(1+\frac{1}{3}\times 3+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 5+\cdots\right)+\frac{1}{3}\times 2\times\left(1+\frac{1}{3}\times 2+\left(\frac{1}{3}\right)^2\times 3+\cdots\right)\\&=\frac{5}{2}\end{aligned}$$

四、【解】

因為$f(1+x)+f(1-x)=0$.所以只要$x_1+x_2=2$,則

$f(x_1)+f(x_2)=0$.因此，所求即為

$$f\left(\frac{1007}{1007}\right)+f\left(\frac{2014}{1007}\right)=f(1)+f(2)=\frac{1}{3}.$$

五、【解】

因為$b^3\le a^6$,所以$\frac{b^3}{a^2}\le a^4$,因此

$$5a^4+\frac{1-b^3}{a^2}\ge 4a^4+\frac{1}{a^2}\ge 3\sqrt[3]{4a^4\cdot\frac{1}{2a^2}\cdot\frac{1}{2a^2}}=3$$

等號成立若且為若$4a^4=\frac{1}{2a^2}$且$a^2=b$,即$a=\frac{1}{\sqrt{2}}$,$b=\frac{1}{2}$,且最小值為3.

六、【解】

令 $M=(m_{ij})_{10\times 3}$, 其中 $m_{ij}=\begin{cases}1, & 若 i\in A_j\\ 0, & 若 i\notin A_j\end{cases}$ 。令

$$S=\{(A_1,A_2,A_3)\mid A_1\cup A_2\cup A_3=\{1,2,\cdots,10\},A_1\cap A_2\cap A_3=\varnothing\}$$
$$T=\{M\mid M是10\times 3的(0,1)矩陣，且M沒有任一列是(1,1,1)或(0,0,0)\}$$

因集 S 與 T 的元素一一對應，$|S|=|T|$. $M\in T$ 則 M 的列共有 $2^3-2=6$ 種可能，所以 $|T|=6^{10}=2^{10}\cdot 3^{10}$, $(a,b,c,d)=(10,10,0,0)$