103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（屏東區） 筆試（二）{參考解答}

一、若 $x=\sum_{k=1}^{2499}\frac{1}{\sqrt{k}}$ ，求 x 的整數部分。

【參考解答】

(1)考慮 $\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\le\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k-1}}=2\left(\sqrt{k}-\sqrt{k-1}\right)$

所以 $\sum_{k=2}^{2500}\frac{1}{\sqrt{k}}\le 2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2500}-\sqrt{2499}\right)=2(50-1)=98$

即 $x=\sum_{k=1}^{2499}\frac{1}{\sqrt{k}}\le 98+1-\frac{1}{50}=98.98$

(2) $\frac{1}{\sqrt{k}}=\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k}}\ge\frac{2}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2\left(\sqrt{k+1}-\sqrt{k}\right)$

所以 $\sum_{k=1}^{2499}\frac{1}{\sqrt{k}}\ge 2\left(\sqrt{2}-1+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{2500}-\sqrt{2499}\right)=2(50-1)=98$

即 $x=\sum_{k=1}^{2499}\frac{1}{\sqrt{k}}\ge 98$

由(1)(2)知 $\boxed{x\text{ 的整數部份為 }98}$ 。

二、如圖，點$M(2,1)$為橢圓C上的一點，橢圓的兩個焦點其座標分別為$(-\sqrt{6},0)$和$(\sqrt{6},0)$。O為原點，直線L平行於OM並交橢圓C於不同的兩點A,B。求ΔOAB面積的最大值。

【參考解答】

設橢圓C的方程為$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$，由題意得

$$\begin{cases} a^2-b^2=6 \\ \dfrac{4}{a^2}+\dfrac{1}{b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=8 \\ b^2=2 \end{cases}$$

所以橢圓的方程為$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$。因為直線$L$平行$OM$，設直線$L$的方程式

為$y=\frac{1}{2}x+m$，由

$$\begin{cases} y=\dfrac{1}{2}x+m \\ \dfrac{x^2}{8}+\dfrac{y^2}{2}=1 \end{cases}$$

得$x^2+2mx+2m^2-4=0$。

設$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，則$x_1+x_2=-2m$，$x_1x_2=2m^2-4$。

因為直線L與橢圓C教於不同的兩點A,B，所以

$(2m)^2-4(2m^2-4)>0$

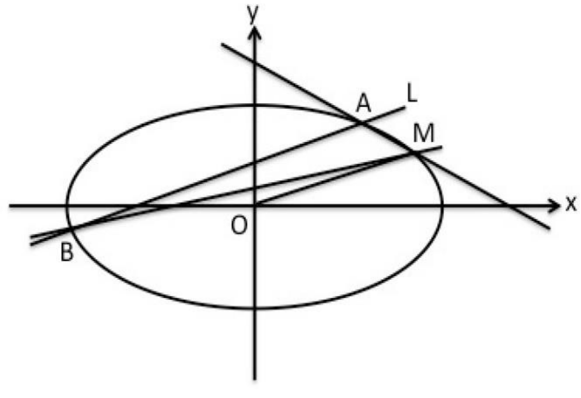
所以$m\in(-2,2)$且$m\neq0$，於是

ΔOAB的面積$=\frac{1}{2}|m||x_1-x_2|=\frac{1}{2}|m|\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}$

$=|m|\sqrt{4-m^2}=\sqrt{m^2(4-m^2)}\leq4$

當$m^2=4-m^2$時等號成立，即$m=\pm\sqrt{2}$。

所以ΔOAB面積的最大值為4。



三、設 a, b 均為正整數且滿足 $(a+1)(b+1)=18$，$a^2b+ab^2=70$，求 $a+2b$ 之值？

【參考解答】$ab+a+b=17$，　$ab(a+b)=70$

ab 及 $a+b$ 為　$x^2-17x+70=0$　之二根

$ab=7$，$a+b=10$　（無正整數解）

或　$ab=10$，$a+b=7$

$a=2$　或　5；　$b=5$　或　2

所以　$a+2b=12$　或　9

四、設 $f(x)=2x-\frac{1}{2}x^2$，令 $f(a)=a_1$，$0<a<4$，且 $f(a_n)=a_{n+1}$，

$n = 1, 2, 3, \ldots..$　。試證 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$。

【參考解答】$f(x)=-\frac{1}{2}x(x-4)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$

$f(0)=f(4)=0$，$f(x)$ 在 2 有最大值為 2

即 $0<x<4$，則 $0<f(x)\leq 2$

$f(a)=a_1$，$0<a<4$，所以 $0<a_1\leq 2$

$a_2=f(a_1)$，所以 $0<a_2\leq 2,\ldots\ldots\ldots,0<a_n\leq 2,\ldots\ldots\ldots$

$$a_{n+1}-a_n=f(a_n)-a_n=-\frac{1}{2}a_n(a_n-4)-a_n$$

$$=-\frac{1}{2}a_n^2+a_n=\frac{1}{2}a_n(2-a_n)\geq 0$$