103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區(屏東區) 筆試(一) 編號:________________

注意事項:

(1)時間分配:2 小時

(2)本試卷共四題,滿分 49 分。第一題 12 分,第二題 12 分,第三題 12 分,第四題 13 分

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、已知數列$\{a_n\}$滿足$a_1=\frac{1}{2}$及$n(a_{n+1}-a_n)+2a_{n+1}=0,\ n\in N$,

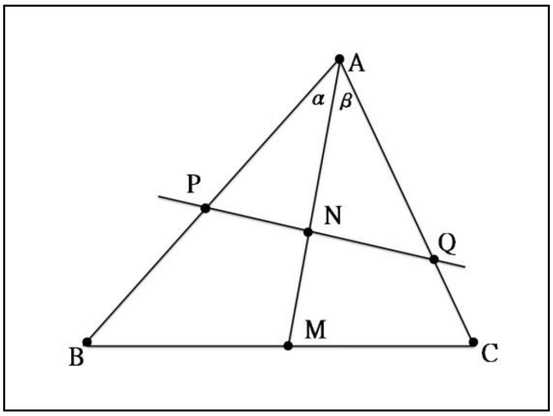
若$b_n=\frac{(n+2)a_n}{2^{n+1}}$,$S_n$是$\{b_n\}$的前$n$項和,求使$S_n>\frac{2013}{4028}$成立的最小$n$值。

二、證明任意給 10 個正整數,其中必存在 6 個數,將他們用適當的運算號連起來後,其運算結果是 315 的倍數。

三、如右圖,

已知 AM 為△ABC 邊 BC 上的中線,任作一直線交 AB, AC, AM 於 P, Q, N 三點。

求證: $\dfrac{AB}{AP},\dfrac{AM}{AN},\dfrac{AC}{AQ}$ 成等差數列。



四、設x、y、z均為整數且滿足$\begin{cases}x^3+y^3+z^3=132\\x+y+z=6\end{cases}$,求$|x|+2|y|+|z|$的所有可能值為何?