103 學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題

南區（屏東區） 口試題 參考答案

1. 在一個有限項的實數列中，任何 7 個連續項之和為負數，而任何 11 個連續項之和為正數，試問這樣的數列最多有幾項？

   【參考解答】

   設數列$a_1,a_2,\cdots,a_n$滿足要求，先證明$n\le 16$。

   若$n\ge 17$，則考慮下面陣列

   $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_{11}$

   $a_2,a_3,a_4,\cdots,a_{12}$

   $a_3,a_4,a_5,\cdots,a_{13}$

   $a_4,a_5,a_6,\cdots,a_{14}$

   $a_5,a_6,a_7,\cdots,a_{15}$

   $a_6,a_7,a_8,\cdots,a_{16}$

   $a_7,a_8,a_9,\cdots,a_{17}$

   因為 11 個連續項之和為正數，所以每一橫列之和皆為正數，於是整個陣列總和為正數。另外，因為任 7 個連續數之和為負數，所以每一行知何為負數，於是整個陣列總和為負數。矛盾。所以$n\le 16$。n=16 的數列如下：

   5,5,-13,5,5,5,-13,5,5,-13,5,5,5,-13,5,5。

2. 設 $f(x)=ax^2-2(a-b)x+a-2b+c$, $a\ne 0$。 若 $0\le x\le 2$，則 $-1\le f(x)\le 1$。試證，若 $0\le x\le 2$，則 $|ax+2b|\le 4$.

【參考解答】 $f(1)=c$， $f(0)=a-2b+c$， $f(2)=a+2b+c$

$$a=\frac{1}{2}[f(0)+f(2)-2f(1)]$$

$$b=\frac{1}{4}[f(2)-f(0)]$$

$$|ax+2b|=\frac{1}{2}|(f(0)+f(2)-2f(1))x+f(2)-f(0)|$$

$$=\frac{1}{2}|(x-1)f(0)+f(2)(x+1)-2f(1)x|$$

$$\le\frac{1}{2}[|x-1|+|x+1|+2|x|]=4$$