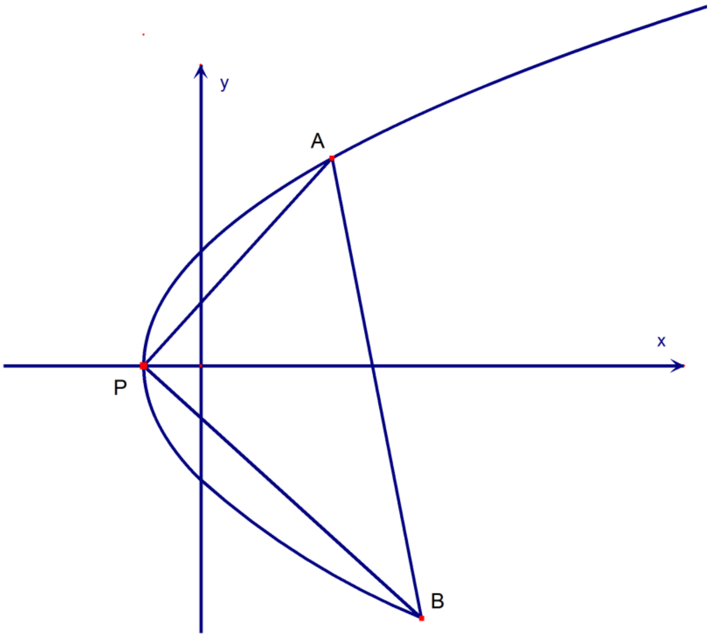
教育部 102 學年度高級中學數學競賽

中投區複賽試題（二）【解答】

一、 5 分　16	四、 3 分　2
二、 4 分　-1	五、 3 分　$-\frac{1}{14}$
三、 3 分　$2x^2+2$	六、 3 分　$2\sqrt{3}$

一、【解】



設 $\overleftrightarrow{PA}: x=m(y+1)$

$\because \overline{PA}\perp\overline{PB},\ \therefore \overleftrightarrow{PB}: x=-\frac{1}{m}(y+1).$

由 $\begin{cases} x=m(y+1) \\ x^2=4(y+1) \end{cases} \Rightarrow m^2(y+1)^2=4(y+1) \Rightarrow y+1=0 \text{ or } y+1=\frac{4}{m^2}$

$\therefore A(\frac{4}{m},\ \frac{4}{m^2}-1)$

由 $\begin{cases} x=-\frac{1}{m}(y+1) \\ x^2=4(y+1) \end{cases} \Rightarrow x^2=-4mx \Rightarrow x=0 \text{ or } x=-4m$

$\therefore B(-4m,\ 4m^2-1)$

故 ΔAPB 之面積為 $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 4m^2-1 & -4m & 1 \\ \frac{4}{m^2}-1 & \frac{4}{m} & 1 \end{vmatrix}$ 的絕對值，即 $\frac{1}{2}\left|16m+\frac{16}{m}\right|=8\left|m+\frac{1}{m}\right|$

當 $m>0,\ \dfrac{m+\frac{1}{m}}{2}\geq\sqrt{m\cdot\frac{1}{m}} \Rightarrow m+\frac{1}{m}\geq 2$

當 $m<0,\ \dfrac{(-m)+(-\frac{1}{m})}{2}\geq\sqrt{(-m)\cdot(-\frac{1}{m})} \Rightarrow m+\frac{1}{m}\leq -2$

$\therefore \left|m+\frac{1}{m}\right|\geq 2 \Rightarrow 8\left|m+\frac{1}{m}\right|\geq 16$

故 ΔAPB 面積之最小值為 16

二、【解】

丟銅板 $m+n$ 次，假設每次丟擲出現正面的機率為 x，出現反面的機率為 y，其中 $x+y=1.$ $\sum_{i=0}^{n-1} C_i^{m+i-1}x^m y^i$ 恰為在丟擲 $m+n$ 次銅板的過程中先出現 m 次正面的機率，$\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{n+j-1}y^n x^j$ 恰為在丟擲 $m+n$ 次銅板的過程中先出現 n 次反面的機率，而這兩個事件彼此為補集，所以其和為 1，也就是

$$\sum_{i=0}^{n-1} C_i^{m+i-1}x^m y^i+\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{n+j-1}y^n x^j=1.$$

所以 $\left(\sum_{i=0}^{n-1} C_i^{m+i-1}x^m y^i+\sum_{j=0}^{m-1} C_j^{n+j-1}y^n x^j-2\right)^{1001}=(1-2)^{1001}=-1.$

三、【解】

因為 f 和 g 皆為二次且首項係數都是 1，所以它們滿足以下：

$$f(x)=g(x)+ax+b\cdots\cdots(1)$$

由此可得

$$\begin{aligned} f^2(x) &= \left[g(x)+ax+b\right]^2 \\ &= g(x)\left[g(x)+2(ax+b)\right]+(ax+b)^2 \end{aligned}$$

又 $f^2(x)$ 除以 $g(x)$ 之餘式為 $4x-4,$ 因此

$$\begin{aligned} (ax+b)^2 &= a^2x^2+2abx+b^2 \\ &= a^2g(x)+4x-4 \cdots\cdots (2) \end{aligned}$$

($\because$ $g(x)$ 的首項係數為 1)

另一方面，

$$\begin{aligned} g^2(x) &= \left[f(x)-ax-b\right]^2 \\ &= f(x)\left[f(x)-2(ax+b)\right]+(ax+b)^2 \end{aligned}$$

而 $g(x)$ 除以 $f(x)$ 的餘式為 $-4x-4,$

即知

$$(ax+b)^2 = a^2f(x)-4x-4 \cdots\cdots (3)$$

($\because$ $f(x)$ 的首項係數為 1)

由(2)(3)可得

$$f(x)=g(x)+\tfrac{8}{a^2}x$$

再由(1)可得 $b=0,\ \tfrac{8}{a^2}=a,\ a=2.$

代回(2), (3)得 $f(x)=x^2+x+1,\ g(x)=x^2-x+1$

四、【解】

因為 $\log 3^{20}=20\log 3=20\cdot 0.4771=9.542$

又 $\log 32=5\log 2=1.505,\ \ \log 40=1+2\log 2=1.602$

所以 $3^{20}=b\cdot 10^8$, 其中 $32<b<40.$

另一方面，

$$\begin{aligned} &\log 2^{30}=30\log 2=9.030 \\ &\log 12=2\log 2+\log 3=1.0791 \end{aligned}$$

所以 $2^{30}=c\cdot 10^8$, 其中 $10<c<12$

綜合以上，可知

$3^{20}-2^{30}=d\cdot 10^8$, 其中 $d=b-c,\ 20<d<30$

$= a \cdot 10^9$，其中 $2 < a < 3$

故 $n = 9$, 而 a 的整數部分為 2.

五、【解】

$$\begin{cases} 2f(x) + 5f(\frac{1}{x}) = x \\ 2f(\frac{1}{x}) + 5f(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

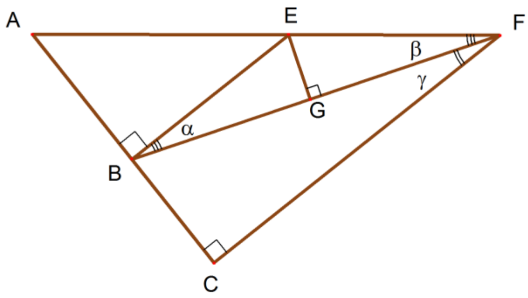
$$\begin{cases} 4f(x) + 10f(\frac{1}{x}) = 2x \\ 25f(x) + 10f(\frac{1}{x}) = \frac{5}{x} \end{cases}$$

$$21f(x) = \frac{5}{x} - 2x$$

$$f(x) = \frac{5-2x^2}{21x}$$

$$f(2) = \frac{5-8}{42} = -\frac{1}{14}$$

六、【解】



ΔBEF 為等腰三角形 $\Rightarrow \alpha = \beta$

$\overline{BE} \parallel \overline{CF} \Rightarrow \alpha = \gamma$

$\therefore \beta = \gamma$

過 E 點作 $\overline{BF}$ 的垂線，$\Delta EFG \cong BFC$

$\therefore \overline{EF} : \overline{GF} = \overline{BF} : \overline{CF}$; $\overline{BE} : \frac{\overline{BF}}{2} = \overline{BF} : \overline{CF}$

$\Rightarrow \overline{BF}^2 = 2\overline{BE} \cdot \overline{CF} = 12$

$\overline{BF} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$