102 學年度台南區高級中學數學科能力競賽複賽試題（二）參考解答

1. 設實數a,b,c滿足$a^2+b^2+c^2=1$和$a+b+c=\sqrt{3}$，試求$a^3+b^4+c^5$之值。

解：$a^2+b^2+c^2=1$…………………………………………………………….（1）

$a+b+c=\sqrt{3}$……………………………………………………………………..（2）

（1）（2）$\Rightarrow 2=\left(a+b+c\right)^2-\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Rightarrow 1=ab+bc+ca$……………………………………………………………（3）

（1）（3）$\Rightarrow 0=\left(a^2+b^2+c^2\right)-ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\left[\left(a-b\right)^2+\left(b-c\right)^2+\left(c-a\right)^2\right]$..（4）

$\because a,b,c$是實數$\left(a-b\right)^2$ 、$\left(b-c\right)^2$ 、$\left(c-a\right)^2\geq 0$…………………………………（5）

（4）（5）$\Rightarrow a=b=c$……………………………………………………………（6）

（2）（6）$\Rightarrow a=b=c=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow a^3+b^4+c^5==\dfrac{1}{3\sqrt{3}}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9\sqrt{3}}=\dfrac{3+4\sqrt{3}}{27}$

2. 求滿足$2012<\sum_{k=1}^{n}C_k^n<3000$之自然數$n$

Sol：$\sum_{k=0}^{n}C_k^n=2^n\Rightarrow\sum_{k=1}^{n}C_k^n=2^n-1$……………………………………………..（1）

$2012<\sum_{k=1}^{n}C_k^n<3000$……………………………………………………………（2）

（1）（2）$\Rightarrow$2013<2^n<3001$\Rightarrow n=11$

3. 假設n是正整數, 且使$39.5^n+28.5^n$為一個正整數. 求n的值.

證明： 因為$39.5^n+28.5^n=\dfrac{1}{2^n}(79^n+57^n)$且當$n$是個偶時,

$79^n+57^n\equiv(-1)^n+1^n\equiv 2 \mod 4$, 即$79^n+57^n=4k+2$（k 是正整數）, 因此當$n$是偶數時 $39.5^n+28.5^n=\dfrac{1}{2^{n-1}}(2k+1)$不是一個正整數.

而當n是奇數時, $79^n+57^n=(79+57)(79^{n-1}-79^{n-2}\times 57+...+57^{n-1})=2^3\times 17\times(2m+1)$,

故只有當$n=1,3$時, $39.5^n+28.5^n$是正整數.

4. 假設 n 個正數 a_1、a_2、、、a_n 滿足 $a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=1$

證明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}\ge\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

證明：$\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}\right)\ (a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n)$

$=\sum_{r,s=1}^{n} rs\left(\dfrac{a_s}{a_r}\right)$（根據算幾不等式）

$\ge 2\sum_{k=1}^{n} k\left[k+(k+1)+\cdots+n\right]-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=2\sum_{k=1}^{n} k\dfrac{\left[(n+k)(n-k+1)\right]}{2}-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\sum_{k=1}^{n} k(n+k)(n-k+1)-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=\sum_{k=1}^{n} kn(n+1)-\sum_{k=1}^{n}k^2$

$=n(n+1)\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)-\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

$=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5. 已知數列$\{x_n\}$的首項 $x_1=1$，且滿足 $nx_nx_{n+1}=n^2+x_n^2$，其中 n 是自然數，試求 $\left[x_{2013}\right]$ 之值。(其中$[x]$表示不超過 x 的最大整数)

解：首先我們可將 $nx_nx_{n+1}=n^2+x_n^2$ 化成 $x_{n+1}=\dfrac{x_n}{n}+\dfrac{n}{x_n}$，其中 n 是自然數

接著我們證明對任意大於或等於 3 的自然數 n，恆有

$$\sqrt{n}\le x_n\le\frac{n}{\sqrt{n-1}}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i) 由已知得 $x_2=x_3=2$，

所以 $\sqrt{3}<x_3=2<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

故當 $n=3$ 時不等式(*)成立。

(ii) 設當$n=k\geq 3$時不等式(*)成立，即$\sqrt{k}\leq x_k\leq \dfrac{k}{\sqrt{k-1}}$

令 $f(x)=\dfrac{x}{k}+\dfrac{k}{x}$ ，其中 $x\in(0,k)$

顯然 $\sqrt{k},x_k,\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}\in(0,k)$

易驗證 $f(x_k)=x_{k+1}$ ， $f\left(\sqrt{k}\right)=\dfrac{1+k}{\sqrt{k}}$ ， $f\left(\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}\right)=\dfrac{k}{\sqrt{k-1}}$

對任意實數$a,b\in(0,k)$ ，

$$f(a)-f(b)=\left(\frac{a}{k}+\frac{k}{a}\right)-\left(\frac{b}{k}+\frac{k}{b}\right)=\frac{k^2+a^2}{ka}-\frac{k^2+b^2}{kb}=\frac{(a-b)(ab-k^2)}{k\,a\,b}\ ,$$

由此可知 f 在區間$(0,k)$上是單調遞減函數

故有

$$\sqrt{k+1}<\frac{k}{\sqrt{k-1}}=f\left(\frac{k}{\sqrt{k-1}}\right)\leq f(x_k)=x_{k+1}\leq f\left(\sqrt{k}\right)=\frac{k+1}{\sqrt{k}}$$

此即當$n=k+1$時不等式(*)成立。

綜合以上，由數學歸納法知對任意大於或等於 3 的自然數n ，恆有

$$\sqrt{n}\leq x_n\leq\frac{n}{\sqrt{n-1}}$$

利用不等式(*)可得$\sqrt{2013}\leq x_{2013}\leq\dfrac{2013}{\sqrt{2012}}$

$$\because\ \sqrt{2013}\approx 44.8665$$

$$\frac{2013}{\sqrt{2012}}\approx 44.8776$$

$$\therefore\ [x_{2013}]=44$$

6. 求實數a的範圍使得下列不等式在$\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$恆成立

$$2^{50}\sin\frac{\theta}{2^{49}}\prod_{k=1}^{50}\cos\frac{\theta}{2^{k-1}}-(2a-1)\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}<3+2a$$

Solution:

根據二倍角公式$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$可證

$$\sin\theta=2^n\sin\frac{\theta}{2^n}\prod_{k=1}^{n}\cos\frac{\theta}{2^k},\forall n\in\mathbb{N}$$

所以原不等式可改寫為

$$\sin 2\theta-(2\sqrt{2}a-\sqrt{2})\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}<3+2a \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

令 $x=\sin\theta+\cos\theta,\ \ \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\Rightarrow x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$

且 $\sin 2\theta=x^2-1,\ \sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}x$

所以式 $(1)\Leftrightarrow x^2-1-(2a-1)x-\frac{4}{x}-3-2a<0,\ x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$

$$\Leftrightarrow x^2-4-(2a-1)x-\frac{4}{x}-2a<0,\ x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left(x-\frac{4}{x}-2a\right)<0,\ x\in\left[1,\ \sqrt{2}\right]$$

$\because x+1>0\ \ \therefore x-\frac{4}{x}-2a<0\Leftrightarrow x-\frac{4}{x}<2a$

$\because\ f(x)=x-\frac{4}{x}$ 在區間 $\left[1,\ \sqrt{2}\right]$ 為單調遞增函數

$\therefore \sqrt{2}-\frac{4}{\sqrt{2}}<2a\Leftrightarrow a>\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$