102 學年度台南區高級中學數學科能力競賽複賽試題（二）

1. 設實數 a,b,c 滿足 $a^2+b^2+c^2=1$ 和 $a+b+c=\sqrt{3}$，試求 $a^3+b^4+c^5$ 之值。

2. 求滿足 $2012<\sum_{k=1}^{n} C_k^n<3000$ 之自然數 n。

3. 假設 n 是正整數，且使 $39.5^n+28.5^n$ 為一個正整數，試求 n 的值。

4. 假設 n 個正數 $a_1,a_2,\ \cdots,a_n$，滿足 $a_1+2a_2+\cdots+na_n=1$。

   證明：$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{2}{a_2}+\dfrac{3}{a_3}+\cdots+\dfrac{n}{a_n}\geq\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

5. 已知數列 $\{x_n\}$ 的首項 $x_1=1$，且滿足 $nx_nx_{n+1}=n^2+x_n^2$，其中 n 是自然數，試求 $\left[x_{2013}\right]$ 之值。(其中符號 $\left[x\right]$ 表示不超過 x 的最大整数)

6. 求實數 a 的範圍使得下列不等式在 $\theta\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 恆成立

$$2^{50}\sin(\frac{\theta}{2^{49}})\left(\prod_{k=1}^{50}\cos(\frac{\theta}{2^{k-1}})\right)-(2a-1)\sqrt{2}\sin(\theta+\frac{\pi}{4})-\frac{2\sqrt{2}}{\cos(\theta+\frac{\pi}{4})}<3+2a$$

(其中符號 $\prod_{k=1}^{n}a_k=a_1a_2\cdots a_n$)