102 學年度台灣省北三區 (新竹高中)
高級中學數理及資訊學科能力競賽
(數學科筆試一參考答案)

問題一： 設 a,b 都是大於 1 的實數。試求 $\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}$ 的最小值。 (12 分)

【證】 由算幾不等式，可得當 $a>1$，且 $b>1$ 時：

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 2\sqrt{\frac{a^2}{b-1}\cdot\frac{b^2}{a-1}}=2\Big(\frac{a}{\sqrt{a-1}}\cdot\frac{b}{\sqrt{b-1}}\Big). \tag{1}$$

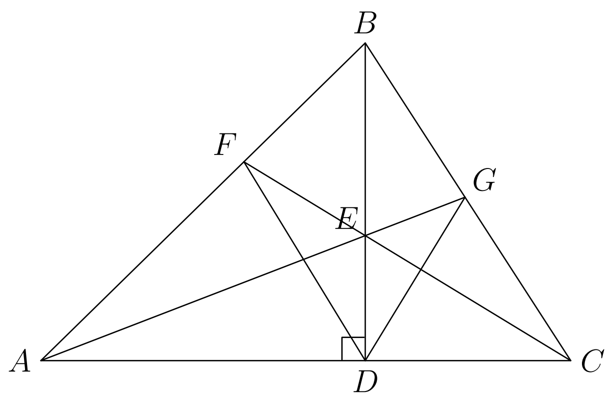
又對任一正實數 $x>1$，因為 $x^2-4x+4=(x-2)^2\geqslant 0$，所以 $x^2\geqslant 4(x-1)$，即得 $x\geqslant 2\sqrt{x-1}$，也就是 $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}\geqslant 2$ 恆成立，且僅當 $x=2$ 時等號成立。所以由 (1) 式可得

$$\frac{a^2}{b-1}+\frac{b^2}{a-1}\geqslant 2\cdot 2\cdot 2=8,$$

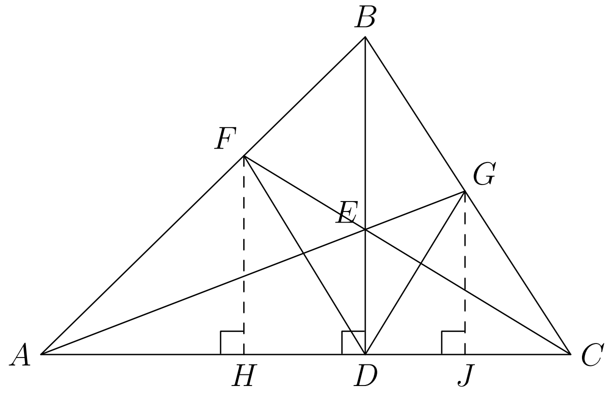
而且僅當 $a=b=2$ 時，$\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}=8$ 為最小值。 □

問題二： 銳角三角形 ABC 中，$\overline{BD}$ 垂直 $\overline{AC}$ 於 D 點，而 E 為 $\overline{BD}$ 上一點。設 CE 交 AB 於 F 點，AE 交 BC 於 G 點。證明：$\angle FDB=\angle GDB$。 (12 分)

【證】 如圖，將 D 置於坐標平面的原點，AC, BD 分別為 x,y 軸。設 A,B,C,E 的坐標分別為 $(a,0),(0,b),(c,0),(0,e)$。則 AG 與 BC 的直線方程式分別為 $\frac{x}{a}+\frac{y}{e}=1$ 以及 $\frac{x}{c}+\frac{y}{b}=1$。所以過兩線交點 G 又通過原點 D 的直線 GD 方程式為 $(\frac{1}{a}-\frac{1}{c})x+(\frac{1}{e}-\frac{1}{b})y=0$。同理可計算出直線 FD 方程式為 $(\frac{1}{a}-\frac{1}{c})x+(\frac{1}{b}-\frac{1}{e})y=0$。因為直線 GD 與 FD 兩者的斜率互為相反數，所以 $\angle FDB=\angle GDB$。



【另證】如下圖，令 F, G 兩點分別對 AC 邊的投影點為 H, J。



因為 AG, BD, CF 三線共點 E，故由西瓦定理：

$$\frac{BF}{FA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CG}{GB}=1. \tag{1}$$

因為 $\triangle AFH\sim\triangle ABD$，所以 $\dfrac{BF}{AF}=\dfrac{AH}{HD}$；類似地有 $\dfrac{CG}{GB}=\dfrac{CJ}{JD}$。將此兩關係代回 (1) 式，得

$$\frac{DH}{HA}\cdot\frac{AD}{DC}\cdot\frac{CJ}{JD}=1. \tag{2}$$

再用一次相似直角三角形的邊長比例關係，得 $\dfrac{AD}{AH}=\dfrac{BD}{FH}, \dfrac{CJ}{CD}=\dfrac{GJ}{BD}$。代回 (2) 式並消掉分子、分母共有的 BD，得

$$\frac{DH}{FH}\cdot\frac{GJ}{JD}=1, \qquad \text{即} \qquad \frac{DH}{FH}=\frac{JD}{GJ}.$$

所以 $\triangle DFH\sim\triangle DGJ$。取餘角即得 $\angle FDB=\angle GDB$，證畢。 □

問題三： 三角形 ABC 中，兩邊長為 $\overline{AB}=17, \overline{AC}=12$。設 D 是 $\triangle ABC$ 中相對於頂點 B 的旁切圓在 AC 邊上的切點，而 E 是 $\triangle ABC$ 中相對於頂點 C 的旁切圓在 AB 邊上的切點。

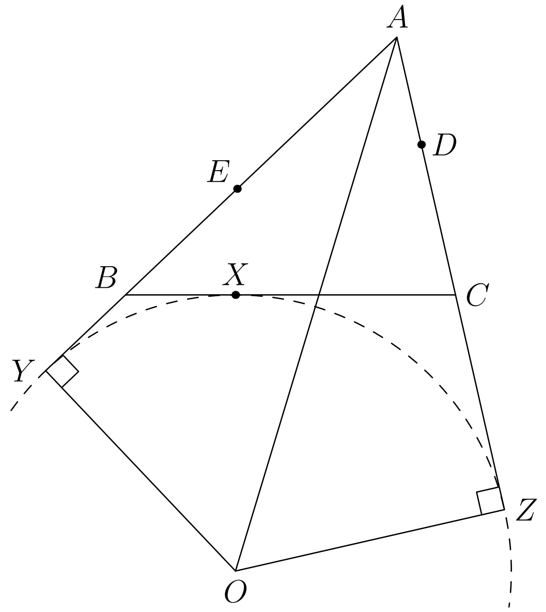
(1) 證明：$\overline{BE}=\overline{CD}$。

(2) 設 F 為 $\triangle ABC$ 的內切圓在 AC 邊上的切點。若 $\overline{DF}=2$，試求 $\overline{BC}$ 邊長。

(所謂三角形 ABC 相對於頂點 B 的旁切圓，指的是與 AC 邊相切、並且與邊 BA, BC 的延長線相切的圓。相對於頂點 C 的旁切圓可類似定義。)

(12 分)

【證】 (1) 設三角形 ABC 相對頂點 A 的旁切圓圓心為 O，該旁切圓與 BC 邊、AB 的延長線及 AC 的延長線分別切於 X,Y,Z 點，如下圖所示。



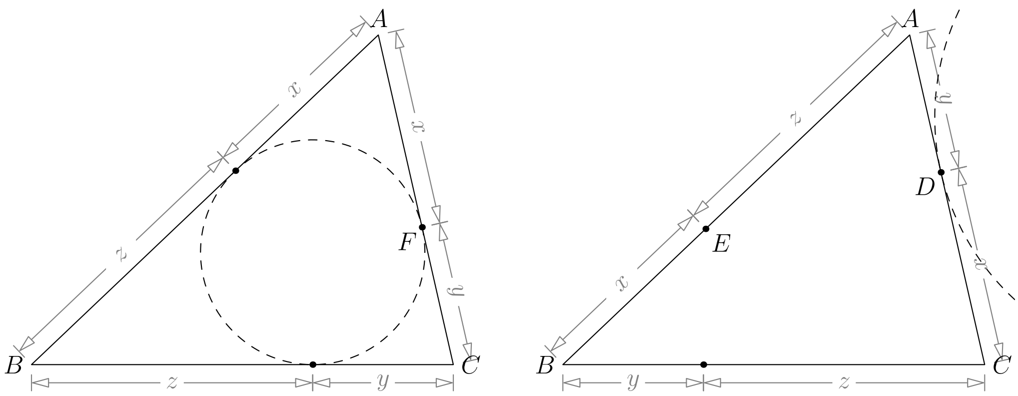
設 $\overline{BC}=a, \overline{AC}=b, \overline{AB}=c$；且設 $\overline{BX}=\overline{BY}=y, \overline{CX}=\overline{CZ}=z$。明顯有 $y+z=\overline{BX}+\overline{CX}=\overline{BC}=a$。另一方面，因為 $\overline{AY}=\overline{AZ}$ (A 點到旁切圓 O 的切線長)，所以 $y+c=z+b$。將下面兩式聯立：

$$y+z=a$$
$$y+c=z+b$$

解得 $y=\dfrac{a+b-c}{2}, z=\dfrac{a+c-b}{2}$。

至此，由對稱性可得 $x=\overline{BE}=\dfrac{b+c-a}{2}=\overline{CD}$。

(2) D, F 兩個切點與諸邊長的對應關係，如下面兩圖所示：



由題設知 $x+z=17, x+y=12$, 且 $|x-y|=\overline{DF}=2$。若 $x-y=2$，則 $(x,y,z)=(7,5,10)$，得 $\overline{BC}=y+z=15$；若 $y-x=2$，則 $(x,y,z)=(5,7,12)$，得 $\overline{BC}=y+z=19$。

故本題有兩解：$\overline{BC}=15$ 或 19。 □

問題四： 設 $f(n)$ 表示正整數 n 所有正因數的乘積。試求所有滿足不等式

$$f(p^4+47) < (p^4+47)^{10}$$

的質數 p。 (13 分)

【證】 令 $g(n)$ 表示正整數 n 的正因數個數，則有 $f(n) = n^{g(n)/2}$。因此，由

$$(p^4+47)^{\frac{g(p^4+47)}{2}} < (p^4+47)^{10},$$

可知：原題等價於求質數 p 使得 $g(p^4+47) < 20$。

首先證明 $p \leqslant 5$。假設 p 為大於或等於 7 的質數，則由 $24 \mid (p^2-1)$ 與 $2 \mid (p^2+1)$，得知 $p^4+47 = (p^2-1)(p^2+1)+48$ 是 48 的倍數。可令 $p^4+47 = 48k = 2^4 \cdot 3 \cdot k$，其中 $k = 2^r \cdot 3^s \cdot m$，而 $(m,6) = 1$。因此 $p^4+47 = 2^{r+4} \cdot 3^{s+1} \cdot m$；於是

$$20 > g(p^4+47) = (r+5)(s+2)g(m).$$

(i) 若 $g(m) = 1$，則 $m = 1$。由 $20 > (r+5)(s+2)$，可得 $r \leqslant 4, s \leqslant 1$。因此

$$51 \leqslant \frac{p^4+47}{48} = k \leqslant 2^4 \cdot 3 = 48,$$

矛盾。

(ii) 若 $g(m) \geqslant 2$，則 $20 > g(p^4+47) \geqslant 5 \cdot 2 \cdot 2 = 20$，也矛盾。

因此 $p \leqslant 5$。

以下分別就 $p = 2,3,5$ 的情形討論：

(i) 當 $p = 2$ 時，$g(p^4+47) = g(63) = g(3^2 \cdot 7) = 6$，滿足條件。

(ii) 當 $p = 3$ 時，$g(p^4+47) = g(74) = g(2 \cdot 37) = 4$，滿足條件。

(iii) 當 $p = 5$ 時，$g(p^4+47) = g(672) = g(2^5 \cdot 3 \cdot 7) = 24$，不合。

由以上的討論，得到：所有可能的質數 p 為 2 或 3。 □