# 102 學年度北二區 (新竹高中)
# 高級中學數理及資訊學科能力競賽
# (數學科筆試一參考答案)

**問題一：** 設 $A,B$ 為橢圓 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 上的兩個動點，滿足直線 $OA$ 與直線 $OB$ 的斜率之積為 $-2$，$O$ 為原點，試證：$\triangle OAB$ 的面積為定值。 (16 分)

【證】 設直線 $OA$ 的斜率為 $m$，則直線 $OB$ 的斜率為 $-\frac{2}{m}$。不妨設 $m>0$，且設 $A$ 在第一象限。

由 $\begin{cases} y=mx \\ x^2+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 及 $\begin{cases} y=-\frac{2}{m}x \\ x^2+\frac{y^2}{2}=1 \end{cases}$ 得

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{m^2+2}},\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m^2+2}}\right)$, $B\left(\frac{m}{\sqrt{m^2+2}},-\frac{2}{\sqrt{m^2+2}}\right)$。

因此直線 $AB$ 的斜率為 $\frac{\sqrt{2}m+2}{\sqrt{2}-m}$，

直線 $AB$ 的方程式為 $y+\frac{2}{\sqrt{m^2+2}}=\frac{\sqrt{2}m+2}{\sqrt{2}-m}\left(x-\frac{m}{\sqrt{m^2+2}}\right)$，

且與 $x$ 軸交於 $C\left(\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{m^2+2}\right)}{\sqrt{2}m+2},0\right)$。

$$\begin{aligned}\therefore \triangle OAB\text{ 面積} &= \triangle OAC\text{ 面積}+\triangle OBC\text{ 面積}\\ &=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{m^2+2}\right)}{\sqrt{2}m+2}\left(\frac{\sqrt{2}m}{\sqrt{m^2+2}}+\frac{2}{\sqrt{m^2+2}}\right)\\ &=\frac{\sqrt{2}}{2}\text{ 為定值}\end{aligned}$$

□

**問題二：** 設 $a,b$ 為實數使得 $x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0$ 至少有一實根。在滿足上述條件的所有可能 $(a,b)$ 中，求 $a^2+b^2$ 的最小值。 (16 分)

【證】 首先觀察到 $x\neq 0$（因為 $0\neq 1$），因此令 $t=x+\frac{1}{x}$，則有 $x^2-tx+1=0$。因為 $x$ 為實數，得到 $t^2-4\geqslant 0\iff |t|\geqslant 2$。另外，我們亦知

$$\begin{aligned} & x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \\ \iff & x^2+ax+b+\frac{a}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \\ \iff & \left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0 \\ \iff & t^2+at+(b-2)=0 \\ \iff & t=x+\frac{1}{x}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2} \end{aligned}$$

綜合上述可知，

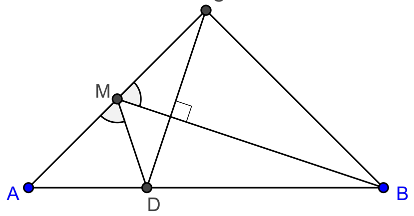
$$\begin{aligned} & \left|\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4(b-2)}}{2}\right|\geqslant 2 \\ \Rightarrow\ & |a|+\sqrt{a^2-4(b-2)}\geqslant\left|-a\pm\sqrt{a^2-4(b-2)}\right|\geqslant 4 \\ \Rightarrow\ & \sqrt{a^2-4(b-2)}\geqslant 4-|a| \end{aligned}$$

將此不等式兩邊平方再化簡以後（若平方後 $\geqslant$ 變成 $\leqslant$，則非最小值）得到

$$\begin{aligned} & 8|a|\geqslant 8+4b \\ \iff & 4a^2\geqslant b^2+4b+4 \\ \iff & 4a^2+4b^2\geqslant 5b^2+5b+4 \\ \iff & a^2+b^2\geqslant\frac{5}{4}\left(b^2+\frac{4}{5}b+\frac{4}{5}\right)=\frac{5}{4}\left(b+\frac{2}{5}\right)^2+\frac{4}{5} \end{aligned}$$

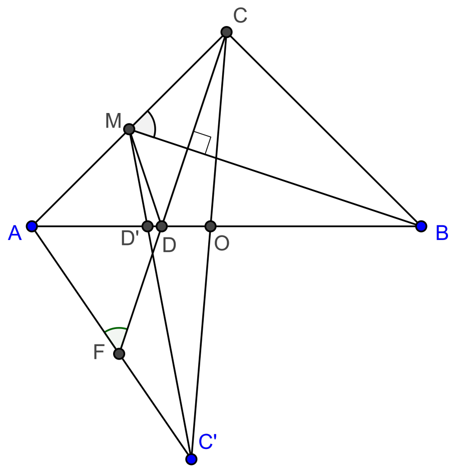
所以，當 $b=-\frac{2}{5}$ 時，$a^2+b^2$ 有最小值 $\frac{4}{5}$。 $\square$

**問題三：** 等腰直角三角形 $ABC$ 中，$\angle C$ 為直角，$M$ 為 $AC$ 中點，過 $C$ 做 $BM$ 的垂線交 $AB$ 於 $D$。證明 $\angle AMD=\angle CMB$。




(17 分)

【證】 參考答案一(逆西瓦定理)：做 $C$ 之於 $AB$ 的對稱點 $C'$，則 $ACBC'$ 為正方形，如下圖。




因為 $\angle ACF = \angle CBM,\ AC = CB,\ \angle FAC = \angle ACB = 90^\circ,$

所以 $\triangle CAF \cong \triangle BCM$($ASA$全等)，因此線段 $CM = AF = FC'$。因為 $\dfrac{CM}{MA}\cdot\dfrac{AF}{FC'}\cdot\dfrac{C'O}{OC} = 1$，根據逆西瓦定理知：$D'$ 與 $D$ 重疊。所以 $\triangle AMC' \cong \triangle CMB$，所以 $\angle AMD = \angle CMB$。

□

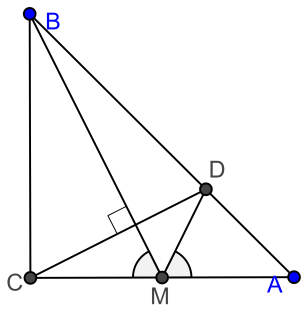
參考答案二(解析)：如下圖，$C$ 置於原點，$M$ 坐標為 $(1,0)$，$A$ 坐標為 $(2,0)$，$B$ 坐標為 $(0,2)$，則 $BM$ 方程式為 $2x+y=2$，

$CD$ 方程式為 $2y=x$，

$AB$ 方程式為 $x+y=2$，

而 $DM$ 方程式為上兩式相減，得 $2x-y=2$

所以直線 $DM$，與直線 $BM$ 斜率差一個負號，因此 $\angle AMD = \angle CMB$。




□