教育部 101 學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）【參考解答】

一、【解】

在 ΔABC 中，由餘弦定理有 $b^2+c^2-2bc\cos 60^0=13^2$，即 $b^2+c^2-bc=13^2$ 或

$$(b+c)^2-3bc=13^2，$$

若令 $b+c=k$ （自然數），則

$$bc=\frac{k^2-13^2}{3}=\frac{1}{3}(k+13)(k-13)。$$

這樣 b, c 是方程式 $x^2-kx+\frac{k^2-13^2}{3}=0$ 的正整數解，由

$$\Delta=(-k)^2-\frac{4(k^2-13^2)}{3}\geq 0，$$

即 $(k+26)(k-26)\leq 0$，解得 $0<k\leq 26$。

但 $k=26$ 時，有 $b=c=7$，不合題意；又 $k^2-13^2>0$，解得 $k>13$。 綜合上述 $13<k<26$。 又 $b\neq c$，且 b, c 均不為 13，可設 $b<13<c$，經計算得

K 取值	22	23	14,15,16,17,18,19,20,21,24,25
b	7	8	無合題意解
c	15	15	無合題意解

故夾 $\angle A$ 的兩邊之長是 7，15 或 8，15。

二、【解】

令 $x=t-\frac{1}{t},\ t\geq 1\ (\because x\geq 0)$， 則

$$-\frac{1}{4}x+\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{4+x^2}=-\frac{1}{4}(t-\frac{1}{t})+\frac{\sqrt{3}}{4}(t+\frac{1}{t})$$

$$=\frac{(\sqrt{3}-1)t}{4}+\frac{\sqrt{3}+1}{4}\cdot\frac{1}{t}\geq 2\sqrt{\frac{3-1}{4^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

上述不等式中的等號產生在 $\frac{(\sqrt{3}-1)t}{4}=\frac{(\sqrt{3}+1)}{4t}$ 的地方，此時

$t^2=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{2}$ ($\because\ t\ge 1$)，所以取 $t=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$，對應的 $x=\dfrac{t^2-1}{t}=\sqrt{2}$

三、【解】

設 $n=2^{q_1}\cdot 3^{q_2}\cdot 5^{q_3}\cdot 7^{q_4}\cdots$。

則 $2n=2^{q_1+1}\cdot 3^{q_2}\cdot 5^{q_3}\cdot 7^{q_4}\cdots$，$3n=2^{q_1}\cdot 3^{q_2+1}\cdot 5^{q_3}\cdot 7^{q_4}\cdots$

$2n$ 之正因數個數為

$$\left(q_1+2\right)\left(q_2+1\right)\left(q_3+1\right)\left(q_4+1\right)\cdots=\left(q_1+2\right)\left(q_2+1\right)p \text{ ——— ①}$$

其中 $p=(q_3+1)(q_4+1)....$

$3n$ 之正因數個數為

$$\left(q_1+1\right)\left(q_2+2\right)\left(q_3+1\right)\left(q_4+1\right)\cdots=\left(q_1+1\right)\left(q_2+2\right)p \text{ ——— ②}$$

②—①得 $(q_1-q_2)p=30-28=2$。

$$\therefore q_1-q_2=1,\ p=2 \text{ 或 } q_1-q_2=2,\ p=1\text{。}$$

若 $q_1-q_2=1,\ p=2$ 代回 ① 得 $(q_1+2)q_1\cdot 2=28$，因無整數解，故不合。

若 $q_1-q_2=2,\ p=1$ 代回 ② 得 $(q_1+1)q_1=30$ 故 $q_1=5,\ q_2=3$。

因此 $6n=2^{q_1+1}\cdot 3^{q_2+1}\cdot p=2^6\cdot 3^4\cdot 1$ 的正因數個數為 $(6+1)(4+1)=35$。

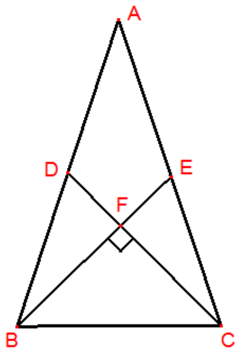
四、【解】

設 $\overline{BC}=x$， BE 交 DC 於 F，則 $BF=\dfrac{\sqrt{2}x}{2},\ \dfrac{DF}{FC}=\dfrac{1}{2}$。

所以 $DF=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$;，

ΔBDF 為直角三角形，

所以 $BD=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$;，$BC=x=\sqrt{\dfrac{2}{5}}$。



五、【解】

因方程式 $x^3+x^2+2x+1=0$ 之根為 α, β, γ，

$$x^3+x^2+2x+1=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\text{ 。}$$

比較係數得

$$\alpha+\beta+\gamma=-1, \quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=2, \quad \alpha\beta\gamma=-1$$

設 E_2 為 $x^3+Ax^2+Bx+C=(x-\alpha^3)(x-\beta^3)(x-\gamma^3)=0$，

那麼 $(\alpha+\beta+\gamma)^3=\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+3(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)$

因此 $A=-(\alpha^3+\beta^3+\gamma^3)=(-1)^3-3(-1)\cdot 2-3(-$

又

$(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)^3=\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3+3(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)(\beta\gamma+\alpha\beta+\ldots)\beta\gamma-3($

所以 $B=\alpha^3\beta^3+\beta^3\gamma^3+\gamma^3\alpha^3=2^3-3\cdot 1\cdot 2\cdot 1-3\cdot 1^2$

最後 $C=-\alpha^3\beta^3\gamma^3=1$

所以 $E_2: x^3-2x^2+5x+1=0$

一、【解】

要求 $$\frac{\binom{n}{n-1}\binom{n}{1}+1}{\binom{2n}{n}}\le 0.05\text{，}$$

所以 $n\ge 6$ 。