教育部101學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）【參考解答】

一、【解】

$a_1=\frac{1}{3},\ a_2=\frac{2}{3},\ a_3=\frac{4}{3}$

當$n=1$時， $a_3-a_1=1$且$a_2+a_1=1$成立

假設$n=k$時有$a_{k+2}-a_k=1$且$a_{k+1}+a_k=k$

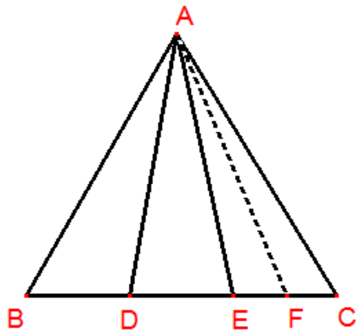
則當 $n=k+1$時

$$a_{k+3}-a_{k+1}=2a_{k+2}-[a_{k+2}]-(2a_k-[a_k])=2(a_{k+2}-a_k)-([a_{k+2}]-[a_k])$$
$$=2-([a_k+1]-[a_k])=2-1=1$$

且$a_{k+2}+a_{k+1}=(1+a_k)+a_{k+1}=1+(a_k+a_{k+1})=1+k$

∴由數學歸納法，得證。

二、【證】



【證明一】用反證法，假設$\angle DAE\le\angle EAC$，因此可在線段$\overline{CE}$上取一點F使得。$\angle DAE=\angle EAF$。因此，在ΔDAF中，$\overline{AE}$是$\angle DAF$的分角線且$\overline{DE}\ge\overline{EF}$

注意：$\angle ADF=\angle ABD+\angle BAD$

$\angle AFD=\angle ACF+\angle CAF$

$\angle ABD=\angle ACF$， $\angle BAD=\angle CAE>\angle CAF$

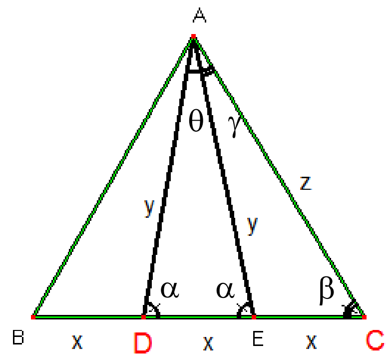
因此，$\angle ADF>\angle AFD$，進而得知$\overline{AF}>\overline{AD}$（大角對大邊）

在ΔADF中使用平分角線性質得矛盾如下：

$$1>\frac{\overline{AD}}{\overline{AF}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{EF}}\ge 1$$

【證明二】令 $\overline{BD}=\overline{DE}=\overline{EC}=x, \overline{AD}=\overline{AE}=y, \angle DAE=\theta$

$\angle EAC=\gamma, \angle \mathrm{AED}=\alpha, \angle \mathrm{ACE}=\beta$



由正弦定理得：

$$\frac{x}{\sin\theta}=\frac{y}{\sin\alpha} \text{ 且 } \frac{x}{\sin\gamma}=\frac{y}{\sin\beta}$$

但 $\alpha>\beta$ 且皆為銳角，因此，

$\sin\alpha>\sin\beta$

由此得知，$\dfrac{x}{\sin\theta}=\dfrac{y}{\sin\alpha}<\dfrac{y}{\sin\beta}=\dfrac{x}{\sin\gamma}$

$\Rightarrow \sin\theta>\sin\gamma$，故 $\theta>\gamma$ ，得證。

三、【解】

令 S 代表不等式的左式，則

$$S=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i}{2-x_i}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i-2+2}{2-x_i}=-n+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}$$

由柯西不等式知：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(2-x_i)\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\sqrt{2-x_i}}\right)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{2-x_i}\right)^2\right)$$

$$\geq\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2-x_i}}\cdot\sqrt{2-x_i}\right)^2=n^2$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\geq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}(2-x_i)}=\frac{n^2}{2n-1}$$

故，

$$S=-n+2\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2-x_i}\geq -n+\frac{2n^2}{2n-1}=\frac{n}{2n-1}$$

四、【解】注意到$2012\equiv 12 \pmod{16}$，另一觀察是：偶數的四次方在模16之下為0，奇數的四次方在模16之下為1，而方程式左邊只有11項，故在模16下，左邊只有可能是$0,1,2,\ldots,11$。

所以此不定方程無(正整數)解。

五、【解】

$$\begin{aligned}&(2x-3)p(x)=(x-3)p(x+1)+xp(x-1)\\ &\Rightarrow (x-3)p(x)+xp(x)=(x-3)p(x+1)+xp(x-1)\\ &\Rightarrow x\left[\,p(x)-p(x-1)\,\right]=(x-3)\left[\,p(x+1)-p(x)\,\right]\end{aligned}$$

令 $$p(x)-p(x-1)=f(x),$$

則 $$xf(x)=(x-3)f(x+1),\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow (x-3)\mid f(x) \text{ 且 } x\mid f(x+1)\\ &\Rightarrow (x-3)\mid f(x) \text{ 且 } (x-1)\mid f(x)\\ &\Rightarrow f(x)=(x-1)(x-3)g(x)\end{aligned}$$

代回(1)得

$$x(x-1)(x-3)g(x)=x(x-2)(x-3)g(x+1)$$

$$\therefore (x-1)g(x)=(x-2)g(x+1)\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$
$$\therefore (x-2)\mid \mathrm{g}(x)$$

令$g(x)=(x-2)h(x)$，代入(2)得

$$(x-1)(x-2)h(x)=(x-2)(x-1)h(x+1)$$
$$\Rightarrow h(x)=h(x+1)$$

$\Rightarrow h(x)$是常數函數

令$h(x)=c$, 則

$$f(x)=c(x-1)(x-2)(x-3)$$

$\Rightarrow p(x)-p(x-1)=c(x-1)(x-2)(x-3)$為三次多項式

$$(\because p(x)\text{不是常數多項式 } \therefore c\neq 0)$$

$\Rightarrow p(x)$必為四次多項式