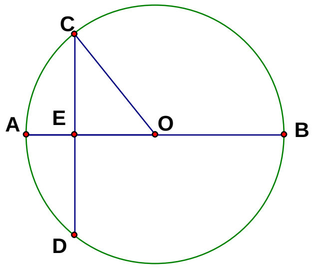
101 學年度台灣省第十區(屏東區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科口試【參考解答】

【口試題一】已知一圓的圓心為O點，且$\overline{AB}$為此圓的直徑，如果$\overline{CD}$為一弦且垂直$\overline{AB}$於E點，又$\overline{AB}$的長度為二位整數，$\overline{CD}$的長度正好是此二位數的個位數字與十位數字互換位置，且$\overline{OE}$的長度為正有理數，試求$\overline{AB}$的長度。



【參考解答】：令$\overline{AB}=10a+b$，其中a,b為異於 0 的數字。

所以$\overline{CD}=10b+a$，本題欲求a,b值，使得$\overline{OE}$的長度為正有理數。

在直角三角形CEO中，

$$\overline{OE}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{CE}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(10a+b)^2-(10b+a)^2}=\frac{3}{2}\sqrt{11(a^2-b^2)}$$

因此，當$11(a^2-b^2)$為完全平方數時，$\overline{OE}$的長度為正有理數。

令$a^2-b^2=11n^2 \Rightarrow (a,b)=(6,5)$滿足題意。

【口試題二】若有 n 個整數，其總和為 0，其乘積恰為 n，則 n 必是 4 的倍數。是否一定成立？請說明。

【參考解答】：

1）若 n 為奇數，則每一個整數都會是奇數，奇數個奇數相加不會是 0，

故 n 必須是偶數。

(2）又因為總和是 0，所以 n 個整數中，不只一個是偶數，否則奇數個奇數和一個偶數相加不會是 0，所以 n 必是 4 的倍數。