教育部 100 學年度高級中學數學競賽

台中區複賽試題（二）　（時間一小時）參考解答

注意事項：

1. 本試卷共六題**填充題**，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、求 $\sqrt{1+\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}}+\cdots+\sqrt{1+\frac{1}{2010^2}+\frac{1}{2011^2}}$ 的值。
(3 分)

【解】

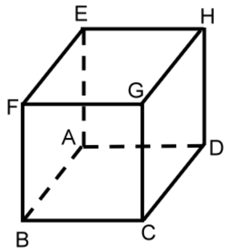
$$\because\ 1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{(n^2+n+1)^2}{n^2(n+1)^2}\Rightarrow\sqrt{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}}=1+\frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\therefore\ 求值式=\sum_{n=1}^{2010}\left(1+\frac{1}{n(n+1)}\right)=\sum_{n=1}^{2010}\left(1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=2011-\frac{1}{2011}.$$

二、設 P 為正立方體 $ABCDEFGH$ 內部一點，且滿足 $\overline{PA}=\overline{PB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$,
(3 分)

$\overline{PF}=\overline{PC}=\frac{\sqrt{107}}{2}$, 求此正立方體的邊長。



【解】

設 a 為此立方體邊長。

定一直角座標系，$A(0,0,0)$，$B(a,0,0)$，$C(a,a,0)$，$F(a,0,a)$

$\because$ $\overline{PA}=\overline{PB}$，$\overline{PF}=\overline{PC}$,　　$\therefore P$ 必在 $\overline{AB}$ 與 $\overline{CF}$ 的中垂面上。

$\overline{AB}$ 的中垂面為 $x=\frac{a}{2}$, $\overline{CF}$ 的中垂面為 $y-z=0$.

$\therefore$ P 落在直線 $\begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y-z=0 \end{cases}$ 上.

設 $P\ (\frac{a}{2},\ t,\ t)$, $t\in\mathbb{R}$.

$\because \quad \overline{PA}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$ 且 $\overline{PF}=\frac{\sqrt{107}}{2}$

$$\therefore \quad \begin{cases} \frac{a^2}{4}+t^2+t^2=\frac{27}{4} \\ \frac{a^2}{4}+t^2+(t-a)^2=\frac{107}{4} \end{cases}$$

解出 $a=5$，$t=\frac{1}{2}$ 或 $a=\frac{4\sqrt{6}}{3}$，$t=\frac{7\sqrt{6}}{12}$.

$\therefore$ 邊長為 5 或 $\frac{4\sqrt{6}}{3}$.

三、$\frac{\tan 1^\circ}{\cos 2^\circ}+\frac{\tan 2^\circ}{\cos 4^\circ}+\frac{\tan 4^\circ}{\cos 8^\circ}+\cdots+\frac{\tan(2^n)^\circ}{\cos(2^{n+1})^\circ}=$？ (答案僅能以 tan 表示)'
(3 分)

【解】

利用 $\cos(2a)=\cos^2 a-\sin^2 a=\cos^a\left(1-\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a}\right)=\frac{1-\tan^2 a}{1+\tan^2 a}$

可得

$$\frac{\tan a}{\cos^2 a}=\frac{\tan a(1+\tan^2 a)}{1-\tan^2 a}=\frac{2\tan a-\tan a(1-\tan^2 a)}{1-\tan^2 a}$$

$$=\frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}-\tan a=\tan 2a-\tan a$$

所以，求值式 $=\tan 2^\circ-\tan 1^\circ+\tan 4^\circ-\tan 2^\circ+\cdots+\tan(2^{n+1})^\circ-\tan(2^n)^\circ$

$=\tan(2^{n+1})^\circ-\tan 1^\circ$.

四、在區間 $(0,1)$ 當中，隨機任選兩個相異點 x 和 y，即可將此區間分成長度各為 a, b 和 c 的三個子區間。已知每一個序對 (a, b, c) 出現的機率均等，
(4 分)

試問 a, b 和 c 可以作為一個三角形的三邊長的機率為何？

【解】

考慮集合 $\{(x,y)\mid\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$ (樣本空間)

甲、　當 $x=0.5$ 時，則不管 y 的值為何，所產生的 a,b,c 皆無法作為三角形的三邊長；對 y 亦然。

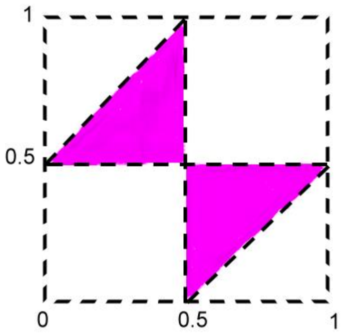
乙、　當 $0<x<0.5$ 時,

i.　若 $0<y<x$，令 $a=y$，$b=x-y$，$c=1-x$，

　則 $a+b=x<0.5<1-x=c$ 不能構成 Δ。

ii.　若 $x<y<0.5$，令 $a=x$，$b=y-x$，$c=1-y$，

　則 $a+b=y<0.5<1-y=c$ 不能構成 Δ。



iii.　若 $y>0.5$,

　令 $a=x$，$b=y-x$，$c=1-y=1-a-b$，

　則 $a+b=y>1-y=c$ 且 $b+c=1-x>x=a$.

　另外，a,b,c 還要滿足 $c+a>b$，即 $y<x+0.5$.

由以上解得的解集合為右圖 $(0,\ 0.5)$，$(0.5,\ 0.5)$，$(0.5,\ 1)$ 所圍區域

丙、　當 $0.5<x<1$ 時，仿照以上的方法，得解集合為右圖 $(1,\ 0.5)$，$(0.5,\ 0.5)$，$(0.5,\ 0)$ 所圍區域

$$\therefore\ 所求機率=\frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times1}=\frac{1}{4}.$$

五、設 f 為一個2010次的多項式，且滿足 $f(k)=\dfrac{1}{k}$，$k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2011.$ 試求 $f(2012)$ 的值。
(4 分)

【解】

令 $g(x)=xf(x)-1$，則 $g(x)$ 為 2011 次多項式且其所有根為 $1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ 2011$.

$\therefore\ g(x)=A(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)$，其中 A 為常數。

$\because\ \ g(0)=-1,\qquad \therefore\ A\cdot(-1)^{2011}\cdot(2011!)=-1.$

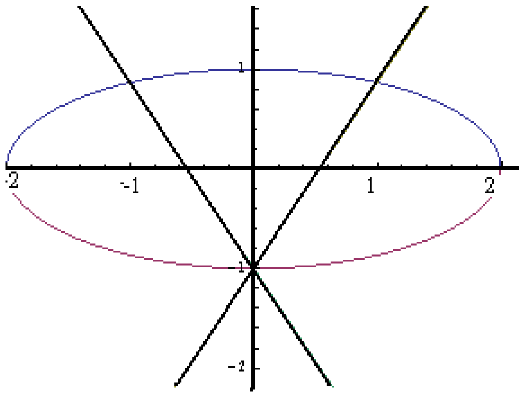
$\Rightarrow\ \ A=\dfrac{1}{2011!}$

$\therefore\quad f(x)=\dfrac{g(x)+1}{x}=\dfrac{A(x-1)(x-2)\cdots(x-2011)+1}{x}.$

所以， $f(2012)=\dfrac{\frac{1}{2011!}\cdot 2011\cdot 2010\cdots 1+1}{2012}=\dfrac{2}{2012}=\dfrac{1}{1006}.$

六、平面上，由圖形 $\dfrac{x^2}{4}+y^2\le 1,\ y+1\ge\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x,\ y+1\ge-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)x$ 所圍成區域之面積為何？
(4 分)

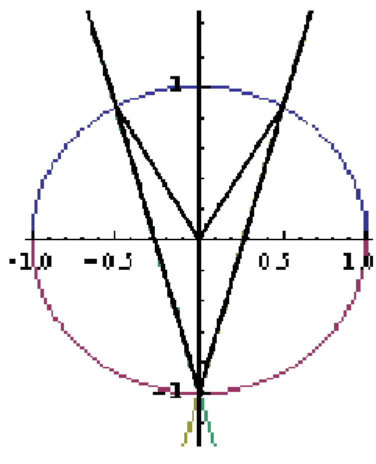
【解】



所圍區域如右圖 S.

作平面到平面之縮放變換 $\begin{cases}\bar{x}=\dfrac{x}{2}\\ \bar{y}=y\end{cases}$

S 轉成右圖 $\bar{S}$，



而 $\bar{S}$ 之面積 $=\dfrac{1}{6}\cdot\pi\cdot 1^2+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin 150^\circ$

$=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}.$

因此，S 之面積為 $2(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2})=\dfrac{\pi}{3}+1.$