教育部 100 學年度高級中學數學競賽
台中區複賽試題（一）　（時間二小時）

注意事項：

1.本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。

2.請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、(9 分) 觀察一組 0, 1 所組成的數列，我們定義：當 1 個或多個相同數連在一起時，稱為一個”串”。例如”1 0 0 0 0 1 1 1 0 1 1”共有 5 個串，或說其串數為 5. 今將 n 個 0 和 m 個 1 隨機排列，形成一串數為 R 的數列。

(a) 求 $R=2$ 的機率。

(b) 若 $R=2k+1$，k 為整數，則 k 的範圍為何？

(c) 求 $R=2k+1$ 的機率。

二、(10 分) 設 $\frac{1}{2}<a_1<\frac{2}{3},\ a_{n+1}=a_n(2-a_{n+1}),\ n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$ 證明

$$\frac{1}{2}\ <\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}-n\ <\ 2.$$

三、(10 分) 找出所有的正整數 n, x, y, z, t 使得

$$n^x+n^y+n^z=n^t.$$

四、設 $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ 是一個嚴格遞增函數，即 $f(m)<f(n)$, 對所有 $m<n$ 皆成立。已知 $f(2)=2$ 且 $f(mn)=f(m)f(n)$ 對所有互質的 m, n 都成立，試

找出所有滿足以上條件的函數 f 並證明之。(ℕ 代表所有正整數所成的集合)
(10 分)

五、現有一個倒圓錐，放入兩個半徑不同的球S_1與S_2，使得S_1與S_2互相外切，且同時與圓錐相切(S_1與S_2剛好卡在圓錐中，如下圖所示)。假設在S_1、S_2與圓錐所圍出的空隙中（灰色區域）可以放入n個全等的小球，使其圍成一圈、每個小球都與圓錐相切、分別與S_1、S_2外切、且相鄰的小球也互相外切，試證：$6<n<10$.（$\sin 18^\circ \approx 0.3090$）
(10 分)