台北市 100 學年度
高級中學數理及資訊學科能力競賽
數學科筆試（一）

注意事項：

1. 本試卷共四題計算證明題，滿分為 49 分。
2. 考試時間：2 小時。
3. 試題及計算紙必須連同答案卷交回。
4. 將演算過程依序填寫在答案卷內。

問題一： 試證：若 $\dfrac{\cos^4 A}{\cos^2 B}+\dfrac{\sin^4 A}{\sin^2 B}=1$，則 $\dfrac{\cos^4 B}{\cos^2 A}+\dfrac{\sin^4 B}{\sin^2 A}=1$。（12 分）

問題二： 已知 $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{100}$ 是一遞增的等比數列，且滿足以下兩個條件：

（i）每一項 x_k 都是 3^m 的形式，其中 m 為正整數，

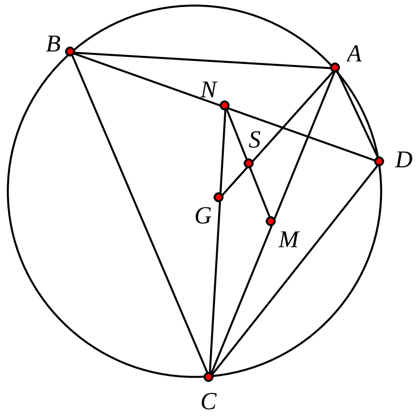
（ii）$\sum_{k=1}^{8} \log_3 x_k = 308$ 且 $56 \le \log_3\left(\sum_{k=1}^{8} x_k\right) \le 57$。

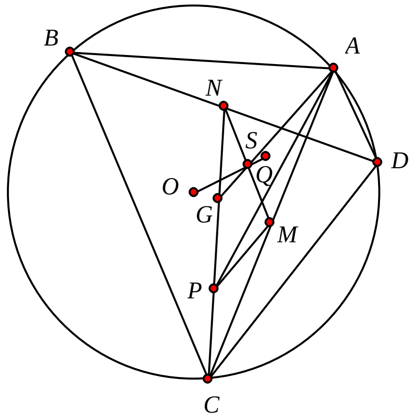
試求 x_{100} 之值。（12 分）

問題三： 設 $ABCD$ 是一圓內接四邊形，點 M 與點 N 分別是 $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 的中點，點 S 是 $\overline{MN}$ 的中點，試證：

（1）若點 G 是 ΔBCD 的重心，則點 S 在 $\overline{AG}$ 上且 $\overline{SA}=3\overline{SG}$。（6 分）

（2）四個三角形 ΔBCD、ΔCDA、ΔDAB 與 ΔABC 的重心共圓。（7 分）





問題四： 對正整數 n ，若存在 n 個連續整數的平方和之算術平均數仍為完全平方數，則稱 n 為「**金整數**」，例如： $n=17$ 是一個金整數，這是因為

$$\frac{(-7)^2+(-6)^2+\cdots+9^2}{17}=\frac{425}{17}=25=5^2 \text{。}$$

（1）試證：若 n 為金整數，則 n 除以 6 的餘數必為 1 或 5。　（5 分）

（2）試求出 2 到 100 的正整數中所有的金整數。　（7 分）