一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區） 筆試（二）

注意事項：

(1)時間分配：1 小時

(2)本試卷共四題，滿分 21 分。第一題 5 分，第二題 4 分，第三題 4 分，第四題 4 分，第四題 4 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、設 $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一個實數數列，$x_1=1,\ x_2=2$ 且滿足對於所有正整數 n，

$x_{n+2}=\frac{1}{2}\left(x_{n+1}+x_n\right)$。證明：$\sum_{k=1}^{\infty}\left(x_{2k+1}-x_{2k-1}\right)=\frac{2}{3}$

二、已知函數 $f(x)$ 滿足 $f(x+5)f(x)-f(x)+f(x+5)+1=0$，且 $f(1)=3$，求 $f(2011)$ 之值？。

三、從正整數 1, 2, 3, …, 20 中任意取出四個數令為 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$，並將其排序，使得 $a_1<a_2<a_3<a_4$，且滿足 $a_2-a_1\geq 3$，$a_3-a_2\geq 4$，$a_4-a_3\geq 5$，則滿足這些條件的數共有多少種取法？

四、證明當 $n\geq 14,\ n$ 可以表示成 $3l+8m$，l 及 m 為正整數或零。
（例如： $14=2\times 3+1\times 8, 15=3\times 5, 16=2\times 8$）

五、在六個人當中，任兩個人或者互相認識、或者互相不認識，證明這六人當中會有兩個人認識一樣多的人。