一百學年度高級中學數學科能力競賽複賽試題
南區（高雄區） 筆試（一）參考解答

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 12 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 13 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。

(4)不可使用電算器。

(5)試題與答案卷一同繳回。

一、(1) 滿足 $x^2+y^2=z^2$ 的正整數 x, y, z 稱為畢氏三數組，證明互質的畢氏三數組 x, y, z 必為兩兩互質且 x 和 y 為一奇一偶。

(2) 如果 x, y, z 為一組互質的畢氏三數組(假設 x 是偶數)，則必存在一奇一偶且互質的 s 和 t 使 $x=2st, y=t^2-s^2, z=s^2+t^2$ (假設 $t > s$)，利用此證明 $x^4+y^4=z^2$ 沒有正整數 x, y, z 的解。

【參考解答】

(1) 如果 x 和 y 不互質，則存在一個質數 p 使 $p|x$ 且 $p|y$，容易可證 $p|z$，與 x,y,z 互質矛盾，所以 x 和 y 互質。同理 y 和 z 互質，x 和 z 互質。

如果 x 和 y 同為奇數，則 x^2 和 y^2 被 4 除都餘 1，所以 z^2 被 4 除餘 2，但有整數的平方被 4 朝 2 的，矛盾。又 x 和 y 互質，因此 x 和 y 為一奇一偶。

（2）如果 $x^4+y^4=z^2$ 有正整數 x,y,z 的解(其中 x 是偶數)。假設 a,b,c 為其中一組且 a 為所有解中的最小 x。由所給的結果，存存在一奇一偶且互質的 s 和 t 使 $a^2=2st, b^2=t^2-s^2, c=s^2+t^2$，其中 s 是偶數，因此 $t=l^2, s=2k^2, k<a$，又 $s^2+b^2=t^2$，存在一奇一偶且互質 u 和 v 使 $s=2uv, b=v^2-u^2, t=u^2+v^2$，其中 $v>u$ 因此 $k^2=uv$，故 $u=d^2, v=e^2$, 其中 d 和 e 為一奇一偶且互質，而且偶數的會小於 a。將之代入 $t=u^2+v^2$ 得到 $d^4+e^4=l^2$，得到一組偶數比 a 小的解,與 a,b,c 為其中一組且 a 為所有解中的最小 x 的假設矛盾。因此 $x^4+y^4=z^2$ 沒有正整數 x,y,z 的解。

二、已知 $a+b=1$ 且 $ab>0$，$4ab\neq 1$。試證：$9ab(1-2a)(1-2b)<(1-4ab)^2$

【參考解答】

（一）$0<a<1$，$0<b<1$，

$1-2a=b-a$，$1-2b=a-b$

$9ab(1-2a)(1-2b)=-9ab(a-b)^2\leq 0$

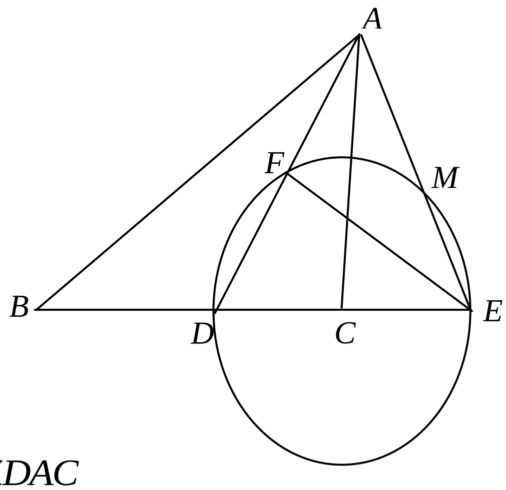
因為 $4ab\neq 1$，所以 $(1-4ab)^2>0$

三、如右圖，ΔABC 中，AD 是 $\angle BAC$ 的平分線，以 C 為圓心，CD 為半徑的半圓交 BC 的延長線於點 E，交 AD 於點 F，交 AE 於點 M，且 $\angle B = \angle CAE$，$FE : FD = 4 : 3$。

(1) 求證：$AF = DF$；

(2) 求 $\angle AED$ 的餘弦值；

(3) 如果 $BD = 10$，求 ΔABC 的面積。



【參考解答】

(1) $\because$ AD 平分 $\angle BAC$ $\quad \therefore$ $\angle BAD = \angle DAC$

$\because$ $\angle B = \angle CAE$ $\quad \therefore$ $\angle BAD + \angle B = \angle DAC + \angle CAE$

$\because$ $\angle ADE = \angle BAD + \angle B$

$\therefore$ $\angle ADE = \angle DAE$ $\quad \Rightarrow$ $EA = ED$

$\because$ DE 是圓 C 的直徑 $\quad \Rightarrow$ $\angle DFE = 90^\circ$

$\therefore$ $AF = DF$

(2) 過點 A 作 $AN \perp BE$ 於 N，在 $\mathrm{Rt}\Delta DFE$ 中，因 $FE : FD = 4 : 3$，故設 $FE = 4x$ $(x > 0)$，則 $FD = 3x$，由勾股定理得 $DE = 5x$。所以，

$AE = DE = 5x, \quad AF = FD = 3x$

$\Rightarrow$ $S_{\Delta ADE} = \dfrac{1}{2} AD \cdot EF = \dfrac{1}{2} DE \cdot AN$

$\Rightarrow$ $AD \cdot EF = DE \cdot AN$ $\quad \Rightarrow$ $(3x + 3x) \cdot 4x = 5x \cdot AN$

$\therefore$ $AN = \dfrac{24}{5} x$，由勾股定理得 $EN = \dfrac{7}{5} x$

$\therefore$ $\cos \angle AED = \dfrac{EN}{AE} = \dfrac{7}{25}$。

(3) 由 (2) 知 $\cos \angle AED = \dfrac{7}{25}$，得 $\sin \angle AED = \dfrac{24}{25}$

$\Rightarrow$ $AN = \dfrac{24}{25} AE = \dfrac{24}{5} x$

在 ΔCAE 和 ΔABE 中

$$\because\ \angle CAE=\angle B,\ \angle AEC=\angle BEA\ \Rightarrow\ \Delta CAE\sim\Delta ABE$$

$$\therefore\ \frac{AE}{BE}=\frac{CE}{AE}\quad\Rightarrow\ AE^2=BE\cdot CE$$

$$\Rightarrow\ (5x)^2=(10+5x)\left(\frac{5}{2}x\right)\quad\Rightarrow\ x=2$$

$$\therefore\ AN=\frac{24}{5}x=\frac{48}{5},\quad BC=BD+DC=10+\frac{5}{2}x=15$$

$$\therefore\ S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}BC\cdot AN=\frac{1}{2}\times 15\times\frac{48}{5}=72$$ 。

四、設 $x_0=2\sqrt{3},\ y_0=3$，對於任意一個正整數 n，$x_n=\dfrac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}$ 且 $y_n=\sqrt{x_n y_{n-1}}$ 。

證明：對於所有正整數 n ，$y_{n-1}<y_n<x_n<x_{n-1}$ 。

【參考解答】

（1）利用數學歸納法證明：對於所有正整數 n ，$x_n>y_n>1$。

已知 $x_0>y_0>1$，假設 $x_{n-1}>y_{n-1}>1$，則

$$\because\ {y_{n-1}}^2-x_{n-1}y_{n-1}=y_{n-1}(y_{n-1}-x_{n-1})<0\quad\Rightarrow\ y_{n-1}(y_{n-1}+x_{n-1})<2x_{n-1}y_{n-1}$$

$$\therefore\ x_n=\frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}>y_{n-1}$$

$$\because\ \sqrt{x_n}>\sqrt{y_{n-1}}>1\quad\Rightarrow\ x_n>\sqrt{x_n y_{n-1}}=y_n>1\cdot 1=1$$

根據數學歸納法，可證得：對於所有正整數 n ，$x_n>y_n>1$。

$$(2)\because\ y_n<x_n\quad\Rightarrow\ 2y_n<x_n+y_n\ \therefore\ x_{n+1}=\frac{2x_n y_n}{x_n+y_n}<2x_n y_n\cdot\frac{1}{2y_n}=x_n$$

$$\because x_{n+1}>y_n\quad\Rightarrow\ y_{n+1}=\sqrt{x_{n+1}y_n}>\sqrt{{y_n}^2}=y_n$$

故由(1)和(2)證得：對於所有正整數 n ，$y_{n-1}<y_n<x_n<x_{n-1}$ 。