教育部 100 學年度高級中學數學競賽
嘉義區複賽試題（二）　（時間一小時）參考解答

注意事項：
1. 本試卷共六題**填充題**，滿分為二十一分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、方程式 $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$ 的所有實數解
(3 分)

為__________。

【解】

方程左邊轉換為以 4 為底的對數得

$$\begin{aligned}&\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40_{4x}\sqrt{x}\\ &= \frac{2\log_4 x}{\log_4 x - \frac{1}{2}} - \frac{42\log_4 x}{\log_4 x + 2} + \frac{20\log_4 x}{\log_4 x + 1}\end{aligned}$$

明顯 $x=1$ 為一解。方程有意義只當 $x \neq 2, 4^{-1}, 4^{-2}$，故分母均不為零。令 $t = \log_4 x$，通分母後化簡得

$$\begin{aligned}&2(t+1)(t+2) - 42(t-\tfrac{1}{2})(t+1) + 20(t-\tfrac{1}{2})(t+2)\\ &= -5(4t^2-3t-1) = -5(4t+1)(t-1)\end{aligned}$$

故另一解為 $t=-1/4$，$t=1$ 或 $x=4$，$x = 4^{-1/4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。因此方程有三實解

$x = 1,\ 4, \dfrac{\sqrt{2}}{2}$。

二、方程 $\left|\left|\left|\left|\left|x^2-x-1\right|-2\right|-3\right|-4\right|-5\right| = x^2+x-30$ 的所有實數解為________。
(3 分)

【解】

左邊為非負，故 $x^2+x-30 = (x-5)(x+6) \geq 0$，$x \geq 5$ 或 $x \leq -6$。

在這範圍內 $x^2-x-20 = (x+4)(x-5) \geq 0$，因此右邊所有絕對值符號可以拿掉，

而方程為 $x^2-x-15 = x^2+x-30$，解為 7.5。

(3 分)
三、方程式 $(x+1)(x+3)(x+6)(x+7)=y^2$ 有________組整數解 (x,y)。

【解】

若 $\sqrt{m^2+35}=x^2+y^2$ 為自然數，則 $\sqrt{m^2+35}=\ell$，ℓ 為某一自然數，

因此 $(\ell-m)(\ell+m)=35$，故 $\begin{cases}\ell-m=1\\ \ell+m=35\end{cases}$ 或 $\begin{cases}\ell-m=5\\ \ell+m=7\end{cases}$，前者之解為

$(\ell,m)=(18,17)$，後者 $(\ell,m)=(6,1)$。若 $x^2+y^2=18$，$(x,y)=(3,3)$。

若 $x^2+y^2=6$，則 (x,y) 無解。因此原式之自然解為 $(x,y,m)=(3,3,17)$。

四、設賭徒 A 有賭本 m 元，賭徒 B 有賭本 n 元。兩人擲骰子決定勝負，
(3 分)
每次擲兩粒骰子，點數和若不大於 7 點則 B 須給 A 一元，反之則 A 須給 B 一元。最後 A 會贏得 B 全部賭本的機率為__________。

【解】

原方程變形為 $y^2=[(x+1)(x+7)][(x+2)(x+6)]$，即

$$y^2=(x^2+8x+7)(x^2+8x+12)$$

設 $x^2+8x=z$，則 $y^2=z^2+19z+84$

(1)若 $z>-3$，則

$$(z+9)^2=z^2+18z+81<z^2+19z+84<z^2+20z+100=(z+10)^2$$

所以此時 y^2 不是完全平方數。

(2)若 $z\le -3$，則 $x^2+8x\le -3$ 或 $(x+4)^2\le 13$，解得 $-7\le x\le -1$，

所以 $x=-7,-6,\cdots,-2,-1$

將 $x=-7,-6,\cdots,-2,-1$ 依次入原方程式可得原方程的整數解 (x,y) 為

$(-7,0),(-6,0),(-4,6),(-4,-6)$，

所以有 6 組整數解。

五、滿足 $x^2+y^2=\sqrt{m^2+35}$ 的所有自然數解 (x,y,m) 為__________。
(3 分)

【解】

$$\frac{(\frac{21}{15})^{n}-(\frac{21}{15})^{m+n}}{1-(\frac{21}{15})^{m+n}}\text{。}$$

六、在 ΔABC 中，$\overline{AB}=5$，$\overline{BC}=6$，$\overline{CA}=7$，E 為外心且 $\overrightarrow{AE}$ 交直線 BC 於 D。若 $\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 $x=$__________，$y=$__________。

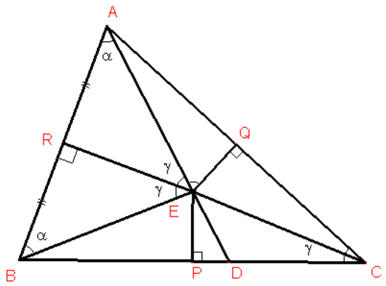
(6 分)

【解】

如圖所示 $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{a\Delta\text{ABD}}{a\Delta\text{ACD}}=\dfrac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\alpha}{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\beta}=\dfrac{\overline{AB}\sin\alpha}{\overline{AC}\sin\beta}$

作 $\overline{BE}$，則 $\angle\text{ABE}=\alpha$，

$\angle BER=\angle AER=\gamma$



$\because$ E 是外接圓之圓心

$\therefore$ $\angle C=\dfrac{1}{2}\angle AEB=\gamma$

$\because$ $\alpha+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\cos\gamma=\cos\angle\text{C}$

同理，$\sin\beta=\cos\delta=\cos\angle\text{B}$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{AB}\cos\angle\text{C}}{\overline{AC}\cos\angle\text{B}}$

由餘弦定理 $\cos\angle\text{C}=\dfrac{\overline{\text{AC}}^2+\overline{\text{BC}}^2-\overline{\text{AB}}^2}{2\overline{\text{AC}}\cdot\overline{\text{BC}}}=\dfrac{6^2+7^2-5^2}{2\cdot6\cdot7}=\dfrac{5}{7}$

同理， $\cos\angle\text{B}=\dfrac{1}{5}$

$\therefore$ $\dfrac{\overline{BD}}{\overline{CD}}=\dfrac{5\cdot\frac{5}{7}}{7\cdot\frac{1}{5}}=\dfrac{125}{49}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AD}=\dfrac{49}{125+49}\overrightarrow{AB}+\dfrac{125}{125+49}\overrightarrow{AC}$

$\therefore$ $x=\dfrac{49}{174}$，$y=\dfrac{125}{174}$。