教育部 100 學年度高級中學數學競賽

嘉義區複賽試題（一）　（時間二小時）參考解答

注意事項：

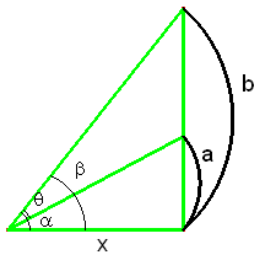
1. 本試卷共五題**計算證明題**，滿分為四十九分。
2. 請將答案寫在答案欄內，計算紙必須連同試卷交回。

一、國慶煙火在施放後升空 700 公尺時爆炸，煙火半徑為 300 公尺，則站
(9 分)
立於距煙火施放處多少公尺可以看得最清楚（提示，此時有最大視角）？

【解】

設煙火最低處距地面 a 公尺，最高處距地面 b 公尺，則

$$\tan\theta=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{b}{x}-\frac{a}{x}}{1+\frac{a}{x}\cdot\frac{b}{x}}=\frac{(b-a)x}{x^2+ab}$$



令 $y=\dfrac{(b-a)x}{x^2+ab}$，則 $yx^2-(b-a)x+yab=0$

配方法得 $x=\dfrac{b-a}{2y}$ 時，y 有最大值 $\dfrac{(b-a)}{2\sqrt{ab}}$

$\therefore$ 在 $x=\sqrt{ab}$ 處有最大視角。

由題意知，$a=700-300=400$，$b=400+600=1000$

$\therefore$ $x=\sqrt{4\times10^5}=200\sqrt{10}$ (公尺)。

二、實數 a, b, c, d, e 滿足 $a+b+c+d+e=8$，
(10 分)
$a^2+b^2+c^2+d^2+e^2=16$，則 e 的最大值為何？

【證】

令 $d'=a+\dfrac{e}{4}$，$b'=b+\dfrac{e}{4}$，$c'=c+\dfrac{e}{4}$，$d'=d+\dfrac{e}{4}$。

則 $a'^2+b'^2+c'^2+d'^2=a^2+b^2+c^2+d^2+\dfrac{(a+b+c+d)e}{2}+\dfrac{e^2}{4}$

$$=16-e^2+\frac{(8-e)e}{2}+\frac{e^2}{4}$$

$$=16-\frac{5e^2}{4}+4e=\frac{96}{5}-\frac{5}{4}(e-\frac{8}{5})^2$$

$a'+b'+c'+d'=8$。由 Cauchy 不等式，

$(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2)(1+1+1+1)\ge(a'+b'+c'+d')^2=64$

知 $a'^2+b'^2+c'^2+d'^2$ 之最小值為 16。

而 $(e-\frac{8}{5})^2$ 之最大值為 $\frac{4}{5}\cdot\frac{16}{5}$。$e$ 的最大值必不小於 a, b, c, d, e 的平均值 $\frac{8}{5}$。故 e 的最大值為 $\frac{8}{5}+\frac{8}{5}=\frac{16}{5}$。

三、一圓圓心為 O，L 為過圓心的直線，過 O 且與 L 垂直的直線交圓於 N，
(10 分)
P、Q 為圓上兩點，PQ、NQ、NP 分別交 L 於 R、S、T。已知 $\angle PNQ=105^\circ$，$\angle PRT=25^\circ$，且 $\angle NST\ge\angle NTS$，試證：$\overline{PT}=\overline{PR}$。

【解】

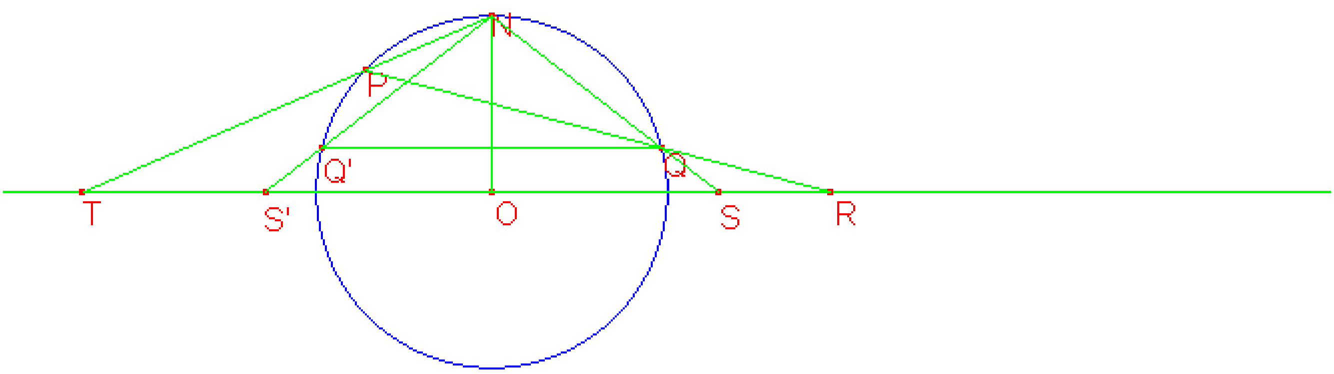
如圖，令 Q' 為 Q 對 ON 的反射點，NQ' 交 L 於 S'。則 $\angle NST=\angle NS'R$，$\angle NS'R=\angle NTR+\angle TNS'$。

因 $PNQQ'$ 共圓及 $QQ'\parallel L$，$\angle TNS'=\angle PQQ'=\angle PRT$。

故 $\angle NST=\angle NTR+\angle PRT$，$\angle NST-\angle NTR=\angle PRT=25^\circ$。

因 $\angle PNQ=105^\circ$，$\angle NSR+\angle NTR=180^\circ-\angle PNQ=75^\circ$。

故 $\angle NST=50^\circ, \angle NTR=25^\circ$，$PT=PR$。



四、設 $a_1 = 2$，$a_n = \frac{a_{n-1}}{2} + \frac{5}{2a_{n-1}}$ ，$n = 2,3,\cdots$
(10 分)

(1) 證明：對所有自然數 $n \geq 2$，$\sqrt{5} < a_n < 3$。(4 分)

(2) 證明：$a_8 - \sqrt{5} < 10^{-159}$ 。(6 分)

【解】

(1)因為 $a_n - \sqrt{5} = \frac{a_{n+1}}{2} + \frac{5}{2a_{n-1}} - \sqrt{5}$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_{n-1}} - \sqrt{\frac{5}{a_{n-1}}}\right)^2 = \frac{1}{2a_{n-1}}(a_{n-1} - \sqrt{5})^2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

我們可以得到 $a_n > \sqrt{5}$ $(n \geq 2)$ 。

顯然 $a_2 = \frac{a_1}{2} + \frac{5}{2a_1} = 1 + \frac{5}{4} < 3$。若 $n = k$ (≥ 2) 時 $a_k < 3$，

則 $a_{k+1} = \frac{a_k}{2} + \frac{5}{2a_k} < \frac{3}{2} + \frac{5}{2\sqrt{5}} < 3$

由數學歸納法得 $a_n < 3$ $(n \geq 2$ 。

(2)令 $b_n = \frac{a_n - \sqrt{5}}{a_n + \sqrt{5}}$ ，則因 $a_n + \sqrt{5} = \frac{1}{2a_{n-1}}(a_{n+1} + \sqrt{5})^2$（證法與(*)同）

$b_{n+1} = \frac{a_{n+1} - \sqrt{5}}{a_{n+1} + \sqrt{5}} = \left(\frac{a_n - \sqrt{5}}{a_n + \sqrt{5}}\right)^2 = b_n^2$

及 $b_8 = b_7^2 = b_6^4 = \cdots = b_1^{128}$ 。

由 $b_8 = \frac{a_8 - \sqrt{5}}{a_8 + \sqrt{5}} > \frac{a_8 - \sqrt{5}}{3 + \sqrt{5}}$ ，得 $a_8 - \sqrt{5} < (3 + \sqrt{5})\left(\frac{2 - \sqrt{5}}{2 + \sqrt{5}}\right)^{128} = \frac{(3 + \sqrt{5})}{(2 + \sqrt{5})^{256}}$

注意到 $(2 + \sqrt{5})^4 = (9 + 4\sqrt{5})^2 > (8\sqrt{5})^2 = 2^5 \times 10$

便知 $(2 + \sqrt{5})^{256} > (2^5 \times 10)^{64} = 10^{64} \cdot 2^{320} > 10^{64} \cdot (10^3)^{32} = 10^{160}$

因此，$a_8-\sqrt{5}<\dfrac{(3+\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})^{256}}<\dfrac{(3+\sqrt{5})}{10^{160}}<10^{-159}$ 。

五、考慮所有形如 $x+y\sqrt{3}$ 的實數，其中 x 和 y 為整數，且 $|x|,\ |y|\le 2011$。
(10 分)
證明：在這些數中存在一個數 $x_0+y_0\sqrt{3}$，其中 x_0 和 y_0 不全為零，且滿足 $\left|x_0+y_0\sqrt{3}\right|<\dfrac{3}{2013}$ 。

【解】

先考慮所有形如 $x+y\sqrt{3}$ 的數，且 x 和 y 都是不大於 2011 的非負整數。由於 x 和 y 取 $0,1,2,\cdots,2011$，共 2012 個整數，所以這樣的數共有 2012^2 個，且最大的一個為 $2011(1+\sqrt{3})$ 。

把這些數畫在數線上，這些數在數線上左端點為 0，右端點為 A: $2011(1+\sqrt{3})$ 。把線段 $\overline{OA}$ 平均分成 2012^2-1 個線段，則這 2012^2 個點中至少有兩個點在同一個小段內。設這兩點對應的數為 $x_1+y_1\sqrt{3}$，它們的距離不大於 $\dfrac{2011(1+\sqrt{3})}{2012^2-1}$，即

$$|(x_1+y_1\sqrt{3})-(x_2+y_2\sqrt{3})|\le\frac{2011(1+\sqrt{3})}{2012^2-1}=\frac{1+\sqrt{3}}{2013}<\frac{3}{2013}\ 。$$

由於 $|x_1-x_2|,\ |y_1-y_2|\le 2011$，所以 $x_0+y_0\sqrt{3}=(x_1-x_2)+(y_1-y_2)\sqrt{3}$ 是題設中的數，且滿足 $|x_0+y_0\sqrt{3}|<\dfrac{3}{2013}$ 。