100 學年度台灣省第十區(屏東區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科筆試(一) 參考解答

注意事項：

(1)時間分配：2 小時

(2)本試卷共四題，滿分 49 分。第一題 13 分，第二題 12 分，第三題 12 分，第四題 12 分。

(3)將計算、證明過程依序寫在答案卷上。不可使用電算器。

(4)試題與答案卷一同繳回。

一、證明：$\sin\frac{\pi}{13}\sin\frac{2\pi}{13}\cdots\sin\frac{6\pi}{13}=\frac{\sqrt{13}}{2^6}$

【參考解答】 設 $\omega=\cos\frac{2\pi}{13}+i\sin\frac{2\pi}{13}$， 則 $\omega^{13}=1$，

ω 是 $x^{13}-1=0$ 的一虛根，其餘的虛根分別是ω^2、ω^3、…、ω^{11}、ω^{12}。

$x^{12}+x^{11}+\cdots+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots(x-\omega^{11})(x-\omega^{12})$

令 $x=1$ 代上式得 $13=(1-\omega)(1-\omega^2)\cdots(1-\omega^{11})(1-\omega^{12})$，再兩邊取絕對值得

$$13=|1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{11}|\,|1-\omega^{12}|$$

$$\because |1-\omega^k|=\sqrt{(1-\cos\frac{2k\pi}{13})^2+\sin^2\frac{2k\pi}{13}}=\sqrt{2-2\cos\frac{2k\pi}{13}}=\sqrt{4\sin^2\frac{k\pi}{13}}=2\sin\frac{k\pi}{13}$$

$$\begin{aligned}\therefore 13 &= |1-\omega|\,|1-\omega^2|\cdots|1-\omega^{11}|\,|1-\omega^{12}|\\ &= 2^{12}\sin\frac{\pi}{13}\sin\frac{2\pi}{13}\cdots\sin\frac{6\pi}{13}\sin\frac{7\pi}{13}\sin\frac{8\pi}{13}\cdots\sin\frac{11\pi}{13}\sin\frac{12\pi}{13}\\ &= 2^{12}\sin\frac{\pi}{13}\sin\frac{2\pi}{13}\cdots\sin\frac{6\pi}{13}\sin\frac{6\pi}{13}\sin\frac{5\pi}{13}\cdots\sin\frac{2\pi}{13}\sin\frac{\pi}{13}\end{aligned}$$

$$= \ 2^{12}\,(\sin\frac{\pi}{13}\sin\frac{2\pi}{13}\cdots\sin\frac{6\pi}{13})^2$$

$$\rightarrow \qquad \sin\frac{\pi}{13}\sin\frac{2\pi}{13}\cdots\sin\frac{6\pi}{13}=\frac{\sqrt{13}}{2^6}\ 。$$

二、已知 I 為 ΔABC 的內切圓之圓心，且 $\overline{CA}+\overline{AI}=\overline{BC}$，如果 $\angle CBA = k\angle BAC$，試求 k 值。

【參考解答】$k=\dfrac{1}{2}$

過 C 做射線 $\overrightarrow{CA}$，在 $\overrightarrow{CA}$ 上取一點 D，

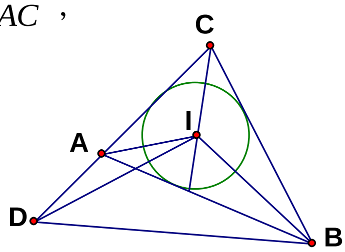
使得 $\overline{AD}=\overline{AI}$，如圖所示。 $\because \overline{CA}+\overline{AI}=\overline{BC}\Rightarrow \overline{CD}=\overline{BC}\Rightarrow \Delta CDB$ 為等腰三角形。

又 I 在 $\angle DCB$ 角平分線上，且 I 為 ΔABC 的內切圓之圓心，

$\therefore \Delta CDI \cong \Delta CBI \Rightarrow \angle CDI = \angle$，又 ΔADI 為等腰三角形，

$\therefore \dfrac{1}{2}\angle CAB=\angle CAI=2\angle CDI=2\angle CBI=\angle CBA \Rightarrow \angle CBA=\dfrac{1}{2}\angle BAC$，

所以 $k=\dfrac{1}{2}$。



三、令 x 為大於零的實數，試求 $\dfrac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}$ 的最大值

【參考解答】

Sol:

$$\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x} = \frac{(x^2+2-\sqrt{x^4+4})(x^2+2+\sqrt{x^4+4})}{x(x^2+2+\sqrt{x^4+4})}$$

$$= \frac{4x^2}{x(x^2+2+\sqrt{x^4+4})}$$

$$= \frac{4}{\frac{1}{x}(x^2+2+\sqrt{x^4+4})}$$

$$= \frac{4}{(x+\frac{2}{x}+\sqrt{x^2+\frac{4}{x^2}})}$$

因為 $x+\frac{2}{x}\geq 2\sqrt{2}$ 且 $x^2+\frac{4}{x^2}\geq 4$ 所以

$$\frac{x^2+2-\sqrt{x^4+4}}{x}\leq\frac{4}{2\sqrt{2}+2}=2\sqrt{2}-2$$

當 $x=\sqrt{2}$ 時 等式成立

四、設方程式 $x^3-x-1=0$ 的三個根為 ω_1 、 ω_2 、 ω_3 。試求 $\omega_1^8+\omega_2^8+\omega_3^8$ 的值。

【參考解答】

已知 $\omega_i^3=\omega_i+1$ 。可得 $\omega_i^4=\omega_i^2+\omega_i$ 。

及 $\omega_i^8=(\omega_i^2+\omega_i)^2=\omega_i^4+2\omega_i^3+\omega_i^2=\omega_i^2+\omega_i+2(\omega_i+1)+\omega_i^2=2\omega_i^2+3\omega_i+2$ 。

所求 $\omega_1^8+\omega_2^8+\omega_3^8=2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+3(\omega_1+\omega_2+\omega_3)+6$ 。

由根與係數關係可得 $\omega_1+\omega_2+\omega_3=0$ 及

$\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2=(\omega_1+\omega_2+\omega_3)^2-2(\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_3+\omega_1\omega_3)=2$ 。

即所求為 $\omega_1^8+\omega_2^8+\omega_3^8=2(\omega_1^2+\omega_2^2+\omega_3^2)+3(\omega_1+\omega_2+\omega_3)+6=10$ 。