100 學年度台灣省第十區(屏東區)
高級中學數理及資訊學科能力競賽複試試題
數學科口試 參考解答

【口試題一】設a,b,c,與d皆為正整數，如果 $a+b+c$、$a+b+d$、$a+c+d$ 及 $b+c+d$ 都是整數的平方。

（1）試舉一例(a,b,c,d)滿足上述條件。

（2）試證：必存在有無限多組(a,b,c,d)滿足上述條件。

【參考解答】

首先令$a+b+c=(3x)^2=9x^2$，

$a+b+d=(3x+3)^2=9x^2+18x+9$，

$a+c+d=(3x+6)^2=9x^2+36x+36$，

$b+c+d=(3x+9)^2=9x^2+54x+81$，

再把這四式加起來為 $33(a+b+c+d)=36x^2+108x+126$，

所以$a+b+c+d=12x^2+36x+42$，再利用上式扣掉前四式得到

$a=3x^2-18x-39,\quad b=3x^2+6$，$c=3x^2+18x+33$ ，$d=3x^2+36x+42$

因為a,b,c,d都要是正數，所以$x>7$，又令$x=8$代入上式，

得到$a=9,b=198,c=396,d=522$。

此時$a+b+c=576$，$a+b+d=729$，$a+c+d=900$，$b+c+d=1089$。

因此只要$x>7$，a,b,c,d必為正數，且

$a+b+c$，$a+b+d$，$a+c+d$，且$b+c+d$也為完全平方數，

所以有無限多組組合

【口試題二】 設x,y,z為正實數，且$x^2+y^2+z^2=25$，試求$A=\dfrac{xy}{z}+\dfrac{yz}{x}+\dfrac{zx}{y}$的最小值

【參考解答】

$$A^2=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2\left(x^2+y^2+z^2\right)\qquad=\left(\frac{xy}{z}\right)^2+\left(\frac{yz}{x}\right)^2+\left(\frac{zx}{y}\right)^2+2\cdot 25$$

$$\geq\frac{xy}{z}\cdot\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}\cdot\frac{zx}{y}+\frac{zx}{y}\cdot\frac{yz}{x}+2\cdot 25=\left(x^2+y^2+z^2\right)+2\cdot 25\qquad=25+2\cdot 25=75$$

因此$A^2\geq 3\cdot 25$，又$A>0$ $\qquad\therefore A\geq 5\sqrt{3}$

等號成立的條件為$\dfrac{xy}{z}=\dfrac{yz}{x}=\dfrac{zx}{y}\Leftrightarrow x=y=z$

$\because x^2+y^2+z^2=25$ $\therefore x=y=z=5\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

所以，當 $x=y=z=5\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，A 有最小值 $5\sqrt{3}$。