九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目：設ΔABC為直角三角形， AD為ΔABC斜邊上的高，若M,N分別為$\Delta ABD,\Delta ACD$ 的內心，連接M,N交AB,AC於K,L；試證ΔABC面積≥ 2 ΔAKL的面積。			
試題來源	■ 自 編 □ 改編於：		
類 別	□ 代 數 □ 數 論 □ 組 合 ■ 幾 何		
難 易 度	□ 難 ■ 中等 □ 易	編 號	筆試(一) 第一題

解答：由於$\angle MDA=\angle NDC=45^\circ,\angle MAD=\frac{1}{2}\angle BAD=\frac{1}{2}\angle ACD=\angle NCD,$

故$\Delta ADM\sim\Delta CDN\Rightarrow\frac{DM}{DN}=\frac{DA}{DC}=\frac{AB}{AC}$，又由於$\angle MDN=\angle BAC=90^\circ$，

而有$\Delta DMN\sim\Delta ABC$，故

$\angle DNM=\angle ACB\Rightarrow\angle ALK=\angle NDC=45^\circ\Rightarrow\Delta AKL$

為等腰；

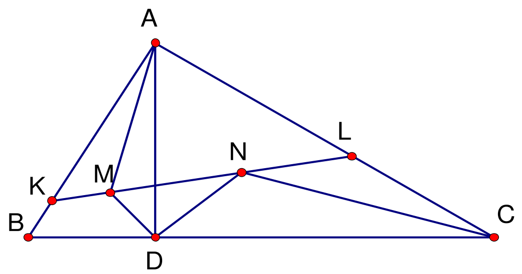
因此， $\angle AKM=\angle APM=45^\circ$，又由於$\angle KAM=\angle DAM$及

$AM=AM$，

可得 $\Delta AKM\cong\Delta ADM\Rightarrow AD=AK=AL$，

因此， $\frac{a\Delta ABC}{a\Delta AKL}=\frac{AB\times AC}{AD^2}=\frac{AB\times AC}{BD\times DC}=\frac{AB\times AC^2}{BD\times DC\times AC}=\frac{AB(AD^2+DC^2)}{BD\times DC\times AC}$

$=\frac{BD(AD^2+DC^2)}{BD\times DC\times AD}=\frac{AD}{DC}+\frac{DC}{AD}\geq 2$， 故得証.



九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：設 N_0 表示所有非負整數．若函數 $f:N_0\to N_0$ 滿足 $f(99)=2010$，且對任意的非負整數 m, n, $mf(n)+nf(m)=(m+n)f(m^2+n^2)$ 恆成立，則 $f(2010)$ 之值為何？</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">☐ 自 編　☐ 改編於：2002 CMO</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="3">■ 代 數　☐ 數 論　☐ 組 合　☐ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難 ☐ 中等 ■ 中偏易</td><td>編 號</td><td>筆試(一) 第二題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：我們將證明：$f(m)\equiv 2010$，$\forall\, m\in N_0$．
如果 f 不是常數函數，則可選取 $m,n\in N_0$

使得 $f(m)-f(n)>0$ 是最小的正數，則
$$f(n)=\frac{mf(n)+nf(n)}{m+n}<\frac{mf(n)+nf(m)}{m+n}<\frac{mf(m)+nf(m)}{m+n}=f(m).$$

所以，$f(n)<f(m^2+n^2)<f(m)$，因而
$0<f(m^2+n^2)-f(n)<f(m)-f(n)$，
此與 m,n 的選取矛盾！故，f 是常數函數．

由於 $f(99)=2010$，
所以 $f(m)\equiv 2010$，$\forall\, m\in N_0$，因而 $f(2010)=2010$</td></tr>
</table>

九十九學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="4">題目：令 m 為正整數，已知 2^{2010} 能整除 99^m-1。請問 m 的最小的值為何?</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="3">■ 自 編 □ 改編於：</td></tr>
<tr><td>類 別</td><td colspan="3">□ 代 數 ■ 數 論 □ 組 合 □ 幾 何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>□ 難 ■ 中等 □ 易</td><td>編 號</td><td>筆試(一) 第三題</td></tr>
<tr><td colspan="4">解答：m 的最小的值 2^{2008}。
假設 $m=2^nk$，其中 k 是個奇數。設 a=99，已知
$a^m-1=a^{(2^n)k}-1=(a^{(2^n)}-1)[a^{(2^n)(k-1)}+a^{(2^n)(k-2)}+....a^{(2^n)}+1]$。
而且中括號內有 k 項，而每個項皆是奇數，
所以中括號內的和是個奇數。
因此 2^{2010} 能整除 a^m-1 若且唯若 2^{2010} 能整除 $a^{(2^n)}-1$。
因此不妨假設 $m=2^n$，得到 $a^m-1=a^{(2^n)}-1=(a^{2^{(n-1)}}+1)[a^{2^{(n-1)}}-1]=....=(a-1)\Pi_{0\leqq j\leqq n-1}(a^{(2^j)}+1)$。
由於 $a=99\equiv3(\mathrm{mod}\ 8)$，所以$(a-1)=98=2(49)$，$(a+1)=100=4(25)$
及 $j\geq1$ 時，$a^{(2^j)}+1\equiv(3)^{(2^j)}+1\equiv(3)^{(2^{(j-1)})}+1=2(\mathrm{mod}\ 8)$。
所以 $j\geq1$ 時，$a^{(2^j)}+1$ 只能被 2 整除， 而不能被 4 整除。
因此有 a^m-1 的所有 2 的因數是 $8(\Pi_{1\leqq j\leqq n-1}(2))=2^{n+2}$。
所以 $n+2\geqq2010$，即 $n\geqq2008$。
所以 m 的最小的值是 2^{2008}。</td></tr>
</table>