九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設實數 $\lambda \geq 1$，且實係數多項式函數 $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$ 滿足：

$$\lambda a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k = 0 \text{。}$$

試證： $f(x)=0$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 的範圍內至少有一實根。

試題來源	■ 自 編　　□ 改編於：
類　　別	■ 代 數　　□ 數 論　　□ 組 合　　□ 幾 何
難 易 度	□ 難　　□ 中等　　■ 易　　**編　　號**　筆試(一)第一題

參考解答：

(1) 當 $\lambda=1$時， $f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$ ，即 $f(x)=0$ 有一實根 $x=1$。

(2) 當 $\lambda>1$時，由於 $\sum_{k=0}^{n} a_k=(1-\lambda)a_0$ ，我們有

(i) $a_0=0$ 時， $f(1)=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=0$ ，即 $f(x)=0$ 有一實根 $x=1$。

(ii) $a_0 \neq 0$ 時， $\sum_{k=0}^{n} a_k$ 與 a_0 為異號的兩實數，而 $f(0)=a_0$ 且 $f(1)=\sum_{k=0}^{n} a_k$ ，故 $f(0)\cdot f(1)<0$。因此，由多項式函數的堪根定理知， $f(x)=0$ 在 $0<x<1$ 的範圍內至少有一實根。

【另證】因 $f(0)\cdot f(1)=a_0\cdot\sum_{k=0}^{n} a_k=a_0\cdot(1-\lambda)a_0=(1-\lambda)a_0^2 \leq 0$ ，故由多項式函數的堪根定理知 $f(x)=0$ 在 $0 \leq x \leq 1$ 的範圍內至少有一實根。

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

<table>
<tr><td colspan="5">題目：設 a,b,c 為正實數，試證：$\dfrac{a^4}{b^3}+\dfrac{b^4}{c^3}+\dfrac{c^4}{a^3}\ge\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\ge\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}$ 。</td></tr>
<tr><td>試題來源</td><td colspan="4">☐ 自　編　■ 改編於：Diamonds in Math.Inequalities</td></tr>
<tr><td>類　　別</td><td colspan="4">■ 代　數　☐ 數　論　☐ 組　合　☐ 幾　何</td></tr>
<tr><td>難 易 度</td><td>☐ 難　■ 中等　☐ 易</td><td>編　號</td><td colspan="2">筆試(一)第二題</td></tr>
<tr><td colspan="5">

參考解答：利用算幾不等式，$\dfrac{a^3}{b^2}+a\ge2\sqrt{\dfrac{a^3}{b^2}\cdot a}=\dfrac{2a^2}{b}$，同理，$\dfrac{b^3}{c^2}+b\ge\dfrac{2b^2}{c}$，$\dfrac{c^3}{a^2}+c\ge\dfrac{2c^2}{a}$。將這三式相加，可得

$$(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})+(a+b+c)\ge2(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}) 。\qquad(1)$$

另一方面，$\dfrac{a^2}{b}+b\ge2\sqrt{\dfrac{a^2}{b}\cdot b}=2a$，同理，$\dfrac{b^2}{c}+c\ge2b$，$\dfrac{c^2}{a}+a\ge2c$。再將三式相加得 $(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a})+(a+b+c)\ge2(a+b+c)$，因此，

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\ge a+b+c 。\qquad(2)$$

合併(1)(2)可得

$$(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})+(a+b+c)\ge2(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})\ge(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})+(a+b+c) 。$$

於是可得：$\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}\ge\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a}$ 。　(3)

其次，$\dfrac{a^4}{b^3}+\dfrac{a^2}{b}\ge2\sqrt{\dfrac{a^4}{b^3}\cdot\dfrac{a^2}{b}}=\dfrac{2a^3}{b^2}$，同理，$\dfrac{b^4}{c^3}+\dfrac{b^2}{c}\ge\dfrac{2b^3}{c^2}$，$\dfrac{c^4}{a^3}+\dfrac{c^2}{a}\ge\dfrac{2c^3}{a^2}$。將這三式相加，可得 $(\dfrac{a^4}{b^3}+\dfrac{b^4}{c^3}+\dfrac{c^4}{a^3})+(\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{b^2}{c}+\dfrac{c^2}{a})\ge2(\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2})$　(4)

合併(3)(4)可得

$$(\frac{a^4}{b^3}+\frac{b^4}{c^3}+\frac{c^4}{a^3})+(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a})\ge2(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})\ge(\frac{a^3}{b^2}+\frac{b^3}{c^2}+\frac{c^3}{a^2})+(\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}) 。$$

於是可得：$\dfrac{a^4}{b^3}+\dfrac{b^4}{c^3}+\dfrac{c^4}{a^3}\ge\dfrac{a^3}{b^2}+\dfrac{b^3}{c^2}+\dfrac{c^3}{a^2}$ 。

</td></tr>
</table>

九十七學年度高級中學數學能力競賽決賽

題目： 設 P 為 ΔABC 內部一點，且 P 到三邊 $\overline{BC},\overline{CA},\overline{AB}$ 的垂足分別為 X,Y,Z ，並設 ΔAPB 及 ΔAPC 的內心分別為 Q,R ，且

$$\angle APB-\angle C=\angle CPA-\angle B 。$$

(1) 試證：$\angle YXZ=\angle BPC-\angle A$ ；

(2) 試證：AP,BQ,CR 三線共點。

試題來源	☐ 自 編　■ 改編於：1996 IMO Problem Shortlist		
類　　別	☐ 代 數　☐ 數 論　☐ 組 合　■ 幾 何		
難 易 度	■ 難　☐ 中等　☐ 易	**編　　號**	筆試(一)第三題

參考解答：

(1) 因 B,X,P,Z 四點共圓，得 $\angle ABP=\angle ZXP$ ；又由 C,Y,P,X 四點共圓，得 $\angle ACP=\angle PXY$ 。因此，

$\angle A=180^\circ-(\angle B+\angle C)=180^\circ-(\angle ABP+\angle PBC+\angle ACP+\angle PCB)$

$=180^\circ-(\angle ZXP+\angle PBC+\angle PXY+\angle PCB)=(180^\circ-\angle PBC+\angle PCB)-(\angle ZXP+\angle PXY)$

$=\angle BPC-\angle YXZ$ ；故 $\angle YXZ=\angle BPC-\angle A$ 。

(2)令直線 BQ 與 CR 分別交 AP 於 V,W 。欲證 V,W 兩點重合，僅需證明 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$ ，

(因為此時利用角平分線比例性質，可得 $\dfrac{\overline{AV}}{\overline{VP}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CP}}=\dfrac{\overline{AW}}{\overline{WP}}$ ，於是， $V=W$ 。)

由(1)得 $\angle YXZ=\angle BPC-\angle A$ ，同理， $\angle XZY=\angle APB-\angle C$ ， $\angle ZYX=\angle CPA-\angle B$ 。

因此， $\angle XZY=\angle ZYX$ ，而有 $\overline{XY}=\overline{XZ}$ 。又利用正弦定理，可知

$\overline{PC}=\dfrac{\overline{PC}}{\sin\angle PXC}=\dfrac{\overline{XC}}{\sin\angle XPC}=\dfrac{\overline{XC}}{\sin\angle XYC}=\dfrac{\overline{XY}}{\sin C}$ ；同理，$\overline{PB}=\dfrac{\overline{XZ}}{\sin B}$ 。故得

$\overline{AB}\cdot\overline{CP}/\overline{AC}\cdot\overline{BP}=\overline{AB}\cdot\dfrac{\overline{XY}}{\sin C}/\overline{AC}\cdot\dfrac{\overline{XZ}}{\sin B}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin C}/\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=1$ ，

即 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BP}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{CP}}$ 。