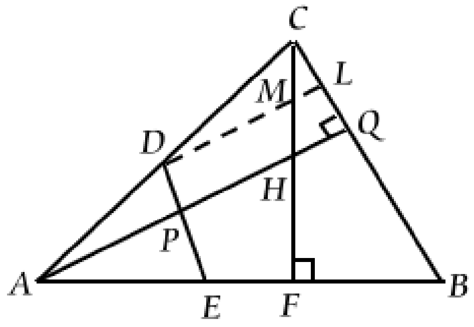
九十六學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【解】



(1)延長 $\overline{DM}$ 跟 $\overline{BC}$ 交於 L。

(2)延長 $\overline{AH}$ 分別交 $\overleftrightarrow{DE}$， $\overleftrightarrow{BC}$ 於 $P,\ Q$。

(3) $\because\ \overline{DC}=\overline{AD},\ \overline{CM}=\overline{MH}$

$\therefore\ \overline{DM}//\overline{A}$

$\therefore\ \overline{DM}//\overline{P}$

(4) $\because\ \overline{DC}=\overline{AD},\ \overline{AE}=\overline{BE}$

$\therefore\ \overline{DE}//\overline{B}$

$\therefore\ \overline{DP}//\overline{L}$

(5) $\because\ \overline{DL}//\overline{PQ},\ \overline{DP}//\overline{LQ}$

$\therefore\ DPQ$ 為平行四邊形

又 $\angle LQP=90^\circ$（ $\overleftrightarrow{AH}\perp\overleftrightarrow{BC}$ ）

$\therefore\ DPQ$ 為矩形

$\therefore\ \angle LDE=9^\circ$

(6)在四邊形 $DEFM$ 中

$\because\ \angle MDP=\angle MFE=90^\circ$

$\therefore\ D,\ E,\ F,\ M$ 四點共圓。

二、【證】

令 S_n 代表左式。由柯西不等式知

$$(1+2+\cdots+k)^2\le\left(\frac{1}{x_1}+\frac{2^2}{x_2}+\cdots+\frac{k^2}{x_k}\right)(x_1+x_2+\cdots+x_k)$$

$$\Rightarrow \frac{k}{x_1+\cdots+x_k} \le \frac{4}{k(k+1)^2}\left(\frac{1}{x_1}+\frac{2^2}{x_2}+\cdots+\frac{k^2}{x_k}\right)$$

將 $k=1,\ \cdots,\ n$ 加總起來得：

$$\begin{aligned}
S_n &\le \sum_{k=1}^{n}\frac{4}{k(k+1)^2}\sum_{j=1}^{k} j^2\frac{1}{x_j}\\
&= 2\sum_{j=1}^{n}\frac{j^2}{x_j}\sum_{k=j}^{n}\frac{2}{k(k+1)^2}\\
&\le 2\sum_{j=1}^{n} j^2\frac{1}{x_j}\sum_{k=j}^{n}\frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}\\
&= 2\sum_{j=1}^{n} j^2\frac{1}{x_j}\left(\frac{1}{j^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\right)\\
&< 2\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{x_j}.
\end{aligned}$$

三、【證】

考慮方程組

$$\begin{cases}
a_2+a_3+\cdots+a_n=k_1^2 & \cdots\cdots\cdots\text{①}\\
a_1+a_3+a_4+\cdots+a_n=k_2^2 & \cdots\cdots\cdots\text{②}\\
\quad\vdots & \\
a_2+a_3+\cdots+a_{n-1}=k_n^2 & \cdots\cdots\cdots\text{ⓝ}
\end{cases}$$

將 n 個式子相加再除以 $n-1$，可得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{1}{n-1}\left(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2\right)\ \ldots..(\,*\,)$$

將(*)依次與①②....ⓝ等式相減，可得

$$a_1=\frac{1}{n-1}(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)-k_1^2$$

$$a_2=\frac{1}{n-1}(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)-k_2^2$$

$$\vdots$$

$$a_n=\frac{1}{n-1}(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)-k_n^2.$$

現在必須找到適當的相異正整數 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使得 $\frac{1}{n-1}(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)$ 為正整數，且使得 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 為相異正整數。事實上，$k_1, k_2, \cdots, k_n$ 的選取很多，以下舉一例：令

$$k_1 = (\quad n-1 \ ^n)\ n(\ -$$

$$k_2 = (\quad n-1 \ ^n)\ n(\ +$$

$$\vdots$$

$$k_n = (\quad n-1 \ ^n)\ n(\ +,$$

則 $k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2=(n-1)^2\left[(n^n+1)^2+(n^n+2)^2+\cdots+(n^n+n)^2\right]$

且 $\frac{1}{n-1}(k_1^2+k_2^2+\cdots+k_n^2)=(n-1)\left[(n^n+1)^2+\cdots+(n^n+n)^2\right]$

是正整數，再者可以證明 $\frac{1}{n-1}(k_1^2+\cdots+k_n^2)$ 必定大於 $k_n^2=(n-1)(n^n+n)^2$。

事實上，可以證明 $k_1^2>\frac{n-1}{n}k_n^2$，因而有

$$\frac{1}{n-1}(k_1^2+k\ {}_2^2\cdots+k_n\ )>^2\frac{1}{n-1}\left[nk\quad\right]$$

$$=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{1}{n-1}k_n^2$$

$$=k_n^2$$

以下證明 $k_1^2>\frac{n-1}{n}k_n^2$.

$$\left[(n-1)(n^n+1)\right]^2-\frac{n-1}{n}\left[(n-1)(n^n+n)\right]^2$$

$$=\frac{(n-1)^2}{n}\left[n(n^n+1)^2-(n-1)(n^n+n)^2\right]$$

$$=\frac{(n-1^2)}{n}\left[n^{2n+1}+2n^{n+1}+\ n-\ n^{2n-1}\ 2\ n^{n+}-^2\ \ n^3\ \ n^2 2\ \ n\ \ ^1\right]$$

$$=\frac{(n-1^2)}{n}\left[n^{2n}+4n^{n+1}+n\ ^2+n-2n^{n+}\ {}^2n\ \right]$$

其中 $n^{2n}-2n^{n+2}=n^{n+2}(n^{n-2}-2)>0$ （$\because$ $n\geq 3$ ）

$4n^{n+1}-n^3>0$ （$\because$ $n\geq 3$ ）

因此，上式為正，故 $k_1^2 > \frac{n-1}{n} k_n^2$.