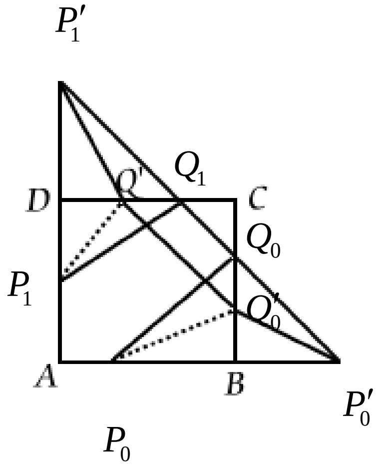
九十六學年度高級中學數學科能力競賽決賽

口試試題【參考解答】

一、【參考解答】



(1)延長 $\overline{P_0B}$ 到 P_0' 使 $\overline{BP_0'}=\overline{P_0B}$

延長 $\overline{P_1D}$ 到 P_1' 使 $\overline{DP_1'}=\overline{P_1D}$

(2)連接 $\overline{P_0'P_1'}$ 分別交 $\overline{BC}$，$\overline{CD}$ 於 Q_0，Q_1，

則 Q_0，Q_1 即為所求。理由如下：

(3) $\overline{P_0Q_0}=\overline{P_0'Q_0}$，$\overline{P_1Q_1}=\overline{P_1'Q_1}$

$\overline{P_0Q_0}+\overline{Q_0Q_1}+\overline{Q_1P_1}=\overline{P_1'P_0'}$

(4) $\overline{P_0Q_0'}=\overline{P_0'Q_0'}$，$\overline{P_1Q_1'}=\overline{P_1'Q_1'}$

$\overline{P_0Q_0'}+\overline{Q_0'Q_1'}+\overline{Q_1'P_1}=\overline{P_0'Q_1'}+\overline{Q_0'P_1} > \overline{P_0'P_1'}$

(5)由(3), (4)知 $\overline{P_0Q_0}+\overline{Q_0Q_1}+\overline{Q_1P_1}$ 為最短。

二、【證】

若 $y\notin A$ 則 $y+m\in A$，所以 A 不為空集合。

令 $x\in A$，由 (2) 知 $x+n\notin A$

$\Rightarrow$ 由 (1) 知 $x+n+m\in A$

$\Rightarrow$ 由 (2) 知 $x+2n+m\notin A$

$\Rightarrow$ 由 (1) 知 $x+2n\in A.$

同理可證，$x+mn\in A\Leftrightarrow m$ 是偶數。

另外，$x+n+m\in A\Rightarrow x+m\notin A$

$\Rightarrow x+2m\in$

因此 $x+nm\in A\Leftrightarrow n$ 是偶數。

所以，我們證得 m 是偶數 $\Leftrightarrow n$ 是偶數

$\Rightarrow m+n$ 是偶數。