九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【解】首先證明：若 p, q, r 及 $\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ 為有理數，則 $\sqrt{p}$ 、$\sqrt{q}$ 、$\sqrt{r}$ 亦為有理數。理由：

$$\left(\sqrt{p}+\sqrt{q}\right)^2=\left(s-\sqrt{r}\right)^2 \Rightarrow 2\sqrt{pq}=s^2+r-p-q-2s\sqrt{r} \Rightarrow 4pq=M^2+4s^2r-4Ms\sqrt{r},$$

其中 $s=\sqrt{p}+\sqrt{q}+\sqrt{r}$ (可假設為正) 及 $M=s^2+r-p-q>0$。故 $\sqrt{r}$ 為有理數，同理 $\sqrt{p}$ 、$\sqrt{q}$ 亦為有理數。

$\because x, y, z$ 為正整數 $\therefore \sqrt{\dfrac{2006}{x+y}}, \sqrt{\dfrac{2006}{x+z}}, \sqrt{\dfrac{2006}{y+z}}$ 均為有理數。

設 $\sqrt{\dfrac{2006}{x+y}}=\dfrac{a}{b}$，其中 a, b 為正整數，且$(a, b)=1$，則

$$2006\cdot b^2=(x+y)a^2 \Rightarrow a^2 \mid 2006=2\times17\times59，$$

得 $a=1$, $x+y=2006\cdot b^2$。
同理：存在正整數 c, d，使得 $x+z=2006\cdot c^2$, $y+z=2006\cdot d^2$。
由於 b, c, d 及 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}$ 均為正整數，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\le 3$，我們分三種情形討論：

(a) 若 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}\le 3$，則 $b=c=d=1$，即 $x+y=2006,\ x+z=2006,\ y+z=2006$。故有正整數解 $x=y=z=1003$。

(b) 若 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=2$，則 b, c, d 中有一個為 1，二個為 2，即 $x+y,\ y+z,\ z+x$ 中有一個為 2006，二個為 4×2006。故有正整數解 x, y, z 三數中有一個為 7×1003，二個為 1003。

(c) 若 $\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=1$ 且 $b\ge c\ge d$，則 $d>1$ 且 $\dfrac{3}{d}\ge\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{d}=1$，故 $d=2$ 或 $d=3$。
若 $d=2$，則 $b=c=3$。故有正整數解 $x=y=z=9\times1003$。
若 $d=3$，則 $b=c=4$ 或 $b=3, c=6$。由檢驗知當 $b=3, c=6$ 時，x, y, z 無正整數解。而當 $b=c=4$ 時，$x=14\times2006,\ y=z=2\times2006$。
因此，(x, y, z)有下列正整數解：
(1) $x=y=z=1003$；

(2) $x=y=z=9\times 1003$；

(3) x, y, z 三數中有一個為7×1003，二個為 1003；

(4) x, y, z 三數中有一個為14×2006，二個為2×2006。

二、【解】令 $f(x)=p^n(x)$，其中$n=1003$。因 $f(x)$ 為整係數多項式，故由因式定理知，

對任意正整數$x_1\neq x_2$，恆有 $x_1-x_2 \mid f(x_1)-f(x_2)$。因此，

$$a-b \mid f(a)-f(b) \text{ 且 } f(a)-f(b) \mid f(f(a))-f(f(b))=a-b \text{。}$$

由此可得 $|a-b|=|f(a)-f(b)|$ --(1)

另一方面，由

$$a-f(b) \mid f(a)-f(f(b))=f(a)-b \text{ 且 } f(a)-b \mid f(f(a))-f(b)=a-f(b)$$

可得 $|a-f(b)|=|f(a)-b|$ --(2)

假設命題不真，則存在整數 $a, b,\ a<b$，且

$$f(f(a))=a,\ f(f(b))=b,\ f(a)\neq a,\ f(b)\neq b\text{，}$$

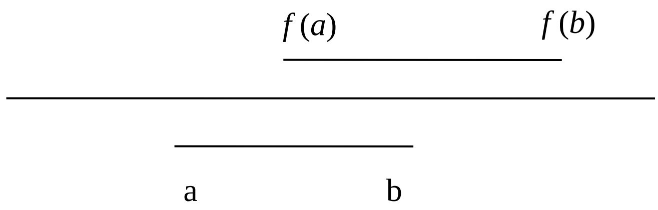
使得 $f(a)\leq f(b)$。由(1)得 $b-a=f(b)-f(a)$ ----------------------------------(3)

情況 I: $a\geq f(b)$，則$|b-f(a)|>|a-f(b)|$，與(2)矛盾。

情況 II: $b\leq f(a)$，則$|b-f(a)|<|a-f(b)|$，與(2)矛盾。

情況 III: $a<f(b),\ b>f(a)$，則由(2)得 $f(b)-a=b-f(a)$，即$a+b=f(a)+f(b)$，

再由(3)可知: $a=f(a),\ b=f(b)$，矛盾!



三、【解】設 $\overline{BC}=a,\ \overline{AC}=b,\ \overline{AB}=c$。

依題意假設

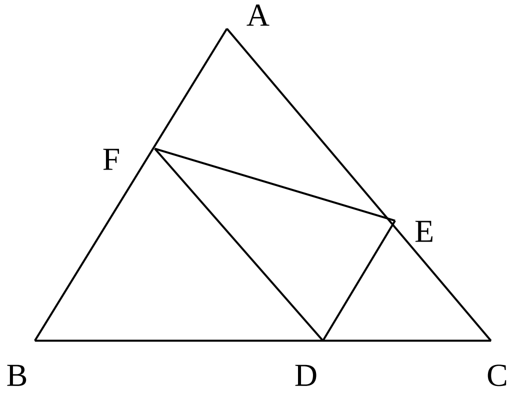
$\overline{AE}=xc,\ \overline{AF}=xb$,

$\overline{BD}=yc,\ \overline{BF}=ya$,

$\overline{CD}=zb,\ \overline{CE}=za$

，其中 $0<x, y, z<1$。

於是可列出以下的等式:



$$(*) \qquad \begin{cases} yc + zb = a \\ xc + za = b \\ xb + ya = c \end{cases}$$ 。

將視為的一次方程組，由克拉瑪公式

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & c & b \\ c & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = 2abc,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix} = ab^2 + ac^2 - a^3 = a(b^2 + c^2 - a^2),$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ c & b & a \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = bc^2 + ba^2 - b^3 = b(c^2 + a^2 - b^2),$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 0 & c & a \\ c & 0 & b \\ b & a & c \end{vmatrix} = ca^2 + cb^2 - c^3 = c(a^2 + b^2 - c^2),$$

得 $x = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},\ y = \dfrac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca},\ z = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 。當 ΔABC 為銳角時，上面的

$$x = \cos A,\ y = \cos B,\ z = \cos C$$

的確介於 0 與 1 之間，故 D, E, F 唯一存在。

註：D, E, F 恰為三高的垂足。