九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（二）【參考解答】

一、【解】

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(k^3+1\right)-\log_{\frac{3}{2}}\left(k^3-1\right)\right)=\sum_{k=2}^{n}\log_{\frac{3}{2}}\frac{k^3+1}{k^3-1}$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{k^3+1}{k^3-1}$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\prod_{k=2}^{n}\frac{(k+1)\left(k^2-k+1\right)}{(k-1)\left(k^2+k+1\right)}$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}\right)$$

其中 $\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}=\frac{3}{1}\cdot\frac{4}{2}\cdot\frac{5}{3}\cdot\cdots\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n+1}{n-1}=\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$ ，

$$\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}=\frac{3}{7}\cdot\frac{7}{13}\cdot\frac{13}{21}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-1)^2-(n-1)+1}{(n-1)^2+(n-1)+1}\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1}$$

$$=\frac{3}{n^2+n+1}\qquad\left(\because (k-1)^2+(k-1)+1=k^2-k+1\right)$$

所以

$$\sum_{k=2}^{n}\left(\log_{\frac{3}{2}}\left(k^3+1\right)-\log_{\frac{3}{2}}\left(k^3-1\right)\right)=\log_{\frac{3}{2}}\left(\prod_{k=2}^{n}\frac{k+1}{k-1}\cdot\prod_{k=2}^{n}\frac{k^2-k+1}{k^2+k+1}\right)$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{n(n+1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{3}{n^2+n+1}\right)$$

$$=\log_{\frac{3}{2}}\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1}\right)<\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{2}=1$$

二、【解】設 ΔEFG 為正方形 ABCD 的任一內接正三角形（如右圖），由於內接正三角形三個頂點至少會在正方形的三個邊上。假設 ΔEFG 的兩個頂點 F, G 在正方形的一組對邊 AB 和 CD 上。在 ΔEFG 中，作 FG 邊上的高 EH，則 E, H, G, D 四點共圓，

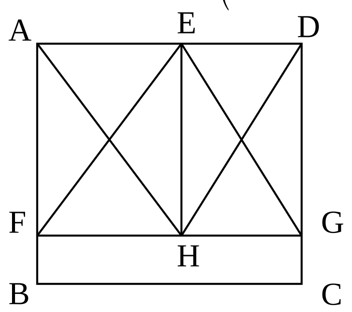
連接 HD，可得 $\angle$HGE=$\angle$HDE=60°；同理，$\angle$HAE=$\angle$HFE=60°。於是得知 ΔHDA 為

正三角形且 H 為此三角形的一個頂點；因此，ΔEFG 的邊 FG 中點 H 是個不變的點。內接正三角形的面積由邊長所決定。

(1) 當 FG 平行 BC 時，其長度最小，而得正三角形最小面積 $=\dfrac{a\times\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

(2) 當 FG 通過 B 點時，FG 長度最大，此時 $\text{FG}=\dfrac{a}{\cos}15^\circ=2\sqrt{2-\sqrt{3}}a$

而得正三角形最大面積 $=\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}a\right)\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}a\right)\div 2=\left(2\sqrt{3}-3\right)a^2$



Ans：最大面積值 $=\left(2\sqrt{3}-3\right)a^2$

最小面積值 $=\dfrac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

三、【解】可遞迴定義 $f(i)$ 使用到的值不超過 4； $f(1)=1$，當 $f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(i)$ 均定義之後，令 $f(v+1)$ 為不出現在 $\{f(i-2),\ f(i-7),\ f(i-10)\}$ 中之最小正整數。

接著證明 4 是可滿足上述條件的最小正整數，假設存在 $f:N\to\{1,2,3\}$ 滿足所求，

則 $\{f(i),\ f(i+3),\ f(i+11)\}=\{1,2,3\}=\{f(i+14),\ f(i+3),\ f(i+11)\}$，所以

$f(i)=f(i+14)$ 對所有 $i\in N$ 均成立。同理

$\{f(i),\ f(i+8),\ f(i+11)\}=\{1,2,3\}=\{f(i+19),\ f(i+8),\ f(i+11)\}$，

所以 $f(i)=f(i+19)$ 對原有 $i\in N$ 均成立。當 j 夠大時，$\exists$ 正整數 m,n 使 $j=1+14m+19n$，所以 $f(j)=f(1)$，這是不可以的。（事實上， $f(1)=f(1+14\times12)=f(1+19\times9)$ 其中 $\left|(1+14\times12)-(1+19\times9)\right|=3$。）