九十五學年度全國高中數學科能力競賽決賽

獨立研究試題（一）【參考解答】

一、【解】注意 y 軸本身就是拋物線 $y=x^2$ 在其頂點 $(0,0)$ 的一條法線，另外，若過 (x_1,x_1^2) 的法線跟 y 軸的交點，也必然是過 $(-x_1,x_1^2)$ 的法線之交點。設 $x_1\neq 0$ 且過 (x_1,x_1^2) 之法線與 y 軸相交於 $(0,x_0)$，則利用過 (x_1,x_1^2) 之切線斜率為 $2x_1$，故知法線斜率為 $-\dfrac{1}{2x_1}$。

於是 $\dfrac{y_0-x_1^2}{0-x_1}=-\dfrac{1}{2x_1}$ ，即得 $y_0=x_1^2+\dfrac{1}{2}$ …..(＊)

由(＊)式知對每一 $x_1\neq 0$ ，$y_0>\dfrac{1}{2}$

且當 $y_0>\dfrac{1}{2}$ 時，可取出 $x_1^2+\dfrac{1}{2}=y_0$

此時過 $(0,0)$，(x_1,x_1^2)，$(-x_1,x_1^2)$ 三點法線通過 $(0,y_0)$ 點。

綜合言之，$y=x^2$ 曲線上有三條法線交於 y 軸上的所有點 $(0,y_0)$ 滿足 $y_0>\dfrac{1}{2}$ 。

二、【解】由柯西不等式得

$$\left(k_1+\cdots+k_n\right)\cdot\left(\frac{1}{k_1}+\cdots+\frac{1}{k_n}\right)\geq n^2$$

等號成立的充要條件為 $k_1=\cdots=k_n$ ，因此

$$5n-4\geq n^2,$$

亦即

$(n-\ 1n)-(\quad\leq 4$，所以

$n\in\{1\ ,\ 2\ ,\}.$

當 $n=1$ 或 $n=4$ 時，上述柯西不等式為等式，所以 $n=1,k_1=1$ 與 $n=4,k_1=\cdots=k_4=4.$

又 $n=2$ 時，$\begin{cases}k_1+k_2=6\\ \dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}=1\end{cases}$ 無正整數解。

最後，$n=3$ 時，$k_1+k_2+k_3=11$ 與 $\dfrac{1}{k_1}+\dfrac{1}{k_2}+\dfrac{1}{k_3}=1.$

令 $q=k_1k_2+k_2k_3+k_3k_1=k_1k_2k_3$ ，則

k_1,k_2,k 為方程式 $x^3-11x^2+qx-q=0$ 的的正整數解。

若 x 為上述方程式不等於 1 與 11 的正整數解，則

$$q=\frac{-x^3+11x^2}{x-1}=-x^2+10x+10+\frac{10}{x-1}$$

因為 q 是正整數，所以 $x-1|10$ 且 $x-1\neq 10$，因此 $x-1\in\{1,2,5\}$ 或 $x\in\{2,3,6\}$。

最後不難看出 $\{k_1, k_2, k_3\}=\{2,3,6\}$.

三、【解】

$$\begin{aligned}
& x^6+x^4+3-2x^3-x^2-2x \\
&=x^6+x^4-2x^3-x^2-2x+3 \\
&=(x-1)^2\left(x^4+2x^3+4x^2+4x+3\right) \\
&=(x-1)^2\left[\left(x^4+2x^3+3x^2+2x+1\right)+\left(x^2+2x+1\right)+1\right] \\
&=(x-1)^2\left[\left(x^2+x+1\right)^2+(x+1)^2+1\right]
\end{aligned}$$

再由 $(x-1)^2\geq 0$，$\left(x^2+x+1\right)^2>0$，$(x+1)^2\geq 0$，$1>0$.

故知 $x=1$ 時，$x^6+x^4+3=2x^3+x^2+2x$

而當 $x\neq 1$ 時，$(x-1)^2>0$，$\left(x^2+x+1\right)^2>0$，$(x+1)^2\geq 0$

所以 $\left(x^6+x^4+3\right)-\left(2x^3+x^2+2x\right)>0$

即 $x\neq 1$ 時，$x^6+x^4+3>2x^3+x^2+2x$

於是 $x^6+x^4+3>2x^3+x^2+2x$ 的所有實數解為 $\mathbb{R}-\{1\}$

（即 1 以外的所有實數）。