94 學年度高級中學數學科能力競賽決賽

筆試 （一）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

令 $x=1/a$，$y=1/b$，$z=1/c$，$\therefore xyz=1$

原不等式變成需證明：$1+\dfrac{3}{xy+yz+zx}\geq\dfrac{6}{x+y+z}$

$\because\ (x+y+z)^2\geq 3(xy+yz+zx)$，

$$\therefore\ 1+\frac{3}{xy+yz+zx}\geq 1+\frac{9}{(x+y+z)^2}\geq\frac{6}{x+y+z}$$

[問題二] 參考解答：

該命題單位至少要準備 13 道題。假設此結論不對，則此命題單位可以只準備 12 道題。考慮這 12 道題中固定的 1 題，稱作題目 A。假設題目 A 在某份試卷中，則此試卷中其他 3 題必須與此題不同(事實上，每份試卷中必須 4 題互異)。剩下的 11 題至多只可以分成 3 組彼此相異的 3 道題，所以題目 A 至多只能在 3 份試卷中。因為題目 A 是 12 道題中任意的一題，所以十份考卷總共至多有 $12\times 3=36$ 道題(相同的題目已重複計算)。但是每份試卷要有 4 道題，36 道題最多只能組成 9 份試卷，矛盾！所以至少要準備 13 道題。下列顯示 13 道題目確實可以組成 10 份符合規定的試卷：(1, 2, 3, 4), (1, 5, 6, 7), (1, 8, 9, 10), (1, 11, 12, 13), (2, 5, 8, 11), (3, 6, 9, 12), (4, 7, 10, 13), (2, 6, 10, 11), (3, 7, 8, 11), (4, 5, 9, 13)。

注意：10 份試卷題目的組合方式並不是唯一的。

[問題三] 參考解答：

設F'為另一焦點，連$\overleftrightarrow{PF'}$交$\overleftrightarrow{CD}$於Q'。

另過F'作平行$\overleftrightarrow{CD}$的直線交$\overleftrightarrow{PQ}$於R

由橢圓的光學性質及$\overleftrightarrow{CD}$平行切線$\overleftrightarrow{PT}$可知

$\angle PQ'Q = \angle PQQ'$，$\angle PF'R = \angle PRF'$

於是 $\overline{PQ} = \overline{PQ'}$，$\overline{QR} = \overline{Q'F'}$

另由 O 是$\overline{FF'}$的中點，$\overline{OQ} // \overline{F'R}$，故得$\overline{FQ} = \overline{QR} = \overline{Q'F'}$

從而 $2\overline{PQ} = \overline{PQ} + \overline{PQ'} = \overline{PF} + \overline{FQ} + \overline{PQ'}$

$$= \overline{PF} + \overline{PQ'} + \overline{Q'F'} = \overline{PF} + \overline{PF'} = \overline{AB}$$

故 $\overline{PQ} = \overline{OA}$