94學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）試題【參考解答】

[問題一] 參考解答：

證明：n個保險箱有k個開著的時候，其餘 $n-k$ 個保險箱都能打開的機率為$\frac{k}{n}$.

底下由數學歸納法證明：

(1) 當$n=k$時結論顯然成立.

(2) 假設結論在$n \geq k$時成立. 則在$n+1$個保險箱的情況下，不妨假設前k個開著的箱子在前n個保險箱中，那麼第$n+1$個箱子能用鑰匙打開的充要條件為第m個$(m \leq n)$箱子開著時，第$n+1$個箱子可用其內的鑰匙打開，因此第$n+1$個箱子的第$n+1$把鑰匙不在這個箱子中，設它在第m個箱子中而將第$n+1$個箱子及其內鑰匙去掉，仍符合歸納假設，

前k個打開的鑰匙，可打開其餘箱子的機率為$\frac{k}{n}$，而把第$n+1$把鑰匙放在前n個保險箱的機率為$\frac{n}{n+1}$；因此，對$n+1$個箱子而言，所求的機率為$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{k}{n}=\frac{k}{n+1}$. 於是結論對一切自然數$n$都成立.

[問題二] 參考解答：

設 $[x]=n$, $x-[x]=y$. 則 $n\in Z$, $y\in[0,1)$. 原方程式化為

$[(n+y)^2-2(n+y)]=n^2-2n$，則 $[y^2+2(n-1)y]=0$，所以

$$0\leq y^2+2(n-1)y<1 \qquad \cdots\cdots(1)$$

當$n\leq 0$，即n為非正的整數時，只有 $y=0$ 滿足 (1) 式.

當$n\geq 1$，關於 y 的不等式 (1) 的解區間為

$$[\,0\,,\sqrt{(n-1)^2+1}-n+1\,).$$

綜上所述，滿足方程的實數 x 的解是

非正的整數及 $x\in[\,n\,,\sqrt{(n-1)^2+1}-n+1\,)\,(n=1,2,3,4)$.

[問題三] 參考解答：

設 $f(x)=px^2-qx+r=p(x-x_1)(x-x_2)$，其中 $0<x_1<1$，$0<x_2<1$，$x_1\neq x_2$.

$\because \quad x_1(1-x_1)\leq[\frac{x_1+(1-x_1)}{2}]^2=\frac{1}{4}$ 且 $x_2(1-x_2)\leq\frac{1}{4}$,

上述兩不等式等號成立 的條件是 $x_1=x_2=\frac{1}{2}$，這與 $x_1\neq x_2$ 相違.

$$\therefore \quad 0<f(0)f(1)=p^2x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)<\frac{p^2}{16}.$$

又 p,q,r為正整數，$\therefore$ $f(0),f(1)$均為整數，故 $f(0)f(1)\geq 1$，從而得 $p^2>16$, $p\geq 5$. 另一方面，$5x^2-5x+1=0$ 在 $(0,1)$ 內確有兩個不同的實根.

所以 p 的最小值為 5.