九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（二）【參考解答】

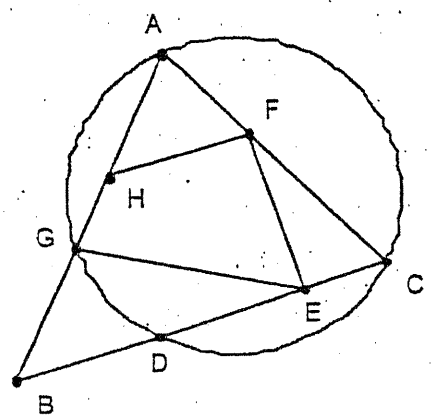
[問題一] 參考解答：

證明：過 F 一直線平行於 $\overline{BC}$ 而與 $\overline{AB}$ 相交於 H，因 $\overline{AF}=\frac{1}{3}\overline{AC}$，得

$\overline{HF}=\frac{1}{3}\overline{BC}=\overline{EC}=\overline{DE}$. 因此四邊形 $HECF$ 為平行四邊形，而四邊形 $HDEF$ 為矩形。

因 $\angle HGE$ 與 $\angle EFH$ 為直角，$HGEF$ 四點共圓 。 因此 $HDEF$ 四點共圓。

又由 $\overline{HE}\,//\,\overline{FC}$，故 $AGDC$ 四點共圓。



[問題二] 參考解答：

$$\begin{aligned} b^2 &= a^2+c^2-2ac\sin 30^0 \\ &= a^2+c^2-\sqrt{3}ac \end{aligned}$$

$$b^2-c^2-2a^2=-a^2-(a^2+c^2-b^2)=-(a^2+\sqrt{3}ac)\le 0$$

[問題三] 參考解答：

證明：事實上，若n的標準分解式為$p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_k^{a_k}$，其中$p_1, p_2, \cdots, p_k$為兩兩相異的質數，則$\phi(n)=\phi(p_1^{a_1})\cdot\phi(p_2^{a_2})\cdots\phi(p_k^{a_k})$．

另一方面，對每個質數p_i，

$$\phi(p_i^{a_i})=p_i^{a_i}-p_i^{a_i-1}=p_i^{a_i-1}(p_i-1),$$

因此$\phi(n)$可被2^k整除．換言之：$2^{\phi(n)}-1=N^{2^k}-1$，

其中N為一個大於3的偶數（因為$n>3$）．但

$$N^{2^k}-1=(N-1)\prod_{i=0}^{k-1}(N^{2^i}+1),$$

即$N^{2^k}-1$為$k+1$個兩兩互質整數的乘積．

所以$2^{\phi(n)}-1$至少有$k+1$個不同的質因數．證畢