九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）【參考解答】

[問題一] 參考解答：

Sol：這 n 個點可由向量 $v_i(i=1,2,\cdots,n)$ 來表示，且 $|v_i|=1$.

計算 $\displaystyle\sum_{1\le i<j\le n}|v_i-v_j|^2=\sum_{1\le i<j\le n}(v_i-v_j)\cdot(v_i-v_j)$

$$=(n-1)\sum_{1\le i\le n}v_i\cdot v_i-2\sum_{1\le i<j\le n}v_i\cdot v_j$$

$$=n\sum_{1\le i\le n}v_i\cdot v_i-(\sum_{1\le i\le n}v_i\cdot v_i+2\sum_{1\le i<j\le n}v_i\cdot v_j)$$

$$=n^2-(\sum_{1\le i\le n}v_i)\cdot(\sum_{1\le i\le n}v_i)$$

此外，等號成立 $\Leftrightarrow \displaystyle\sum_{1\le i\le n}v_i=0$

[問題二]參考解答：

Sol:

$$1=\frac{1}{2}ab\sin C$$

$$16=4a^2b^2(1-\cos^2 C)=4a^2b^2-(a^2+b^2-c^2)^2$$

$$=(2ab+a^2+b^2-c^2)(2ab-a^2-b^2+c^2)$$

$$=(a+b+c)(a+b-c)(c+a-b)(c+b-a)$$

$$s(s-a)(s-b)(s-c)=1$$

$$[(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3]^{\frac{1}{3}}\cdot 3^{\frac{2}{3}}\ge(s-a)+(s-b)+(s-c)=s$$

$$\frac{(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3}{3}\ge(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)$$

$$[(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3]^{\frac{4}{3}}\ge 3^{\frac{1}{3}}$$

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3\ge 3^{\frac{1}{4}}=\sqrt[4]{3}$$

當 $a=b=c$ 時，三角形面積為 $1\Rightarrow a=\dfrac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$$(s-a)^3+(s-b)^3+(s-c)^3=\sqrt[4]{3}$$

[問題三] 參考解答：

Sol：足碼都 $\equiv n$.

$$4(a_{i-1}+a_i+a_{i+1})^2=((2a_{i-1}+a_i)+(a_i+2a_{i+1}))^2$$
$$\geq 4(2a_{i-1}+a_i)(a_i+2a_{i+1})$$

即 $$(a_{i-1}+a_i+a_{i+1})^2\geq(2a_{i-1}+a_i)(a_i+2a_{i+1}) \qquad (1)$$

又 $$(2a_{i-1}+a_i)(2a_i+a_{i-1})\geq 2(a_{i-1}+a_i)^2 \qquad (2)$$

二式相乘,得

$$(a_{i-1}+a_i+a_{i+1})^2(2a_i+a_{i-1})\geq(a_i+2a_{i+1})\cdot 2\cdot(a_{i-1}+a_i)^2$$

代入 $i=1$, 2 , 3 , ⋯ , 2004 , 2005

$$\Rightarrow\begin{cases}(a_1+a_2+a_3)^2(a_1+2a_2)\geq(a_2+2a_3)\cdot 2\cdot(a_1+a_2)^2\\(a_2+a_3+a_4)^2(a_2+2a_3)\geq(a_3+2a_4)\cdot 2\cdot(a_2+a_3)^2\\\vdots\\(a_{2004}+a_1+a_2)^2(a_{2004}+2a_{2005})\geq(a_1+2a_2)\cdot 2\cdot(a_{2004}+a_1)^2\end{cases}$$

$\Rightarrow$ 全部相乘，再開方即得。