

九十三學年度高級中學數學科能力競賽決賽

獨立研究（一）試題

注意事項：

- (1) 時間分配：2 小時。
- (2) 將計算、證明過程依序寫在答案卷上。
- (3) 不可使用電算器。
- (4) 試題與答案卷一同繳回。

【問題一】：任給在球面 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ 上 n 個點。

證明：這些點之間距離的平方之總和小於或等於 n^2 。

【問題二】：設三角形 ABC 的三邊長分別為 a, b, c ，且令 $s = \frac{a+b+c}{2}$ 。已知 $\triangle ABC$ 的

面積為 1，試求 $(s-a)^3 + (s-b)^3 + (s-c)^3$ 的最小值。

【問題三】：設 $a_1, a_2, \dots, a_{2004}$ 都是正數。證明：

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3}{\sqrt{2}} \times \frac{a_2 + a_3 + a_4}{\sqrt{2}} \times \dots \times \frac{a_{2004} + a_1 + a_2}{\sqrt{2}} \\ \geq (a_1 + a_2) \times (a_2 + a_3) \times \dots \times (a_{2004} + a_1)$$