九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
筆試（一）參考解答

【問題一】：設正實數數列$t_1, t_2, \cdots$是一個公比為 10 的等比數列. 試求所有可能的正整數n及所有的n次多項式$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$，滿足：最高次項係數$a_n$是整數，且

$$\left| f(\log_{10} t_k) \right| = 93，\ \forall\, k=1,2,\cdots,n+1.$$

【參考解答】：令$d_k=\log_{10} t_k$，則$\langle d_k \rangle$為公差為 1 的等差數列. 注意：滿足條件的n次多項式為

$$f(x)=a_n\prod_{k=1}^{n}(x-d_k)+a_{n-1}\prod_{k=1}^{n-1}(x-d_k)+\cdots+a_1(x-d_1)+a_0，其中\ a_0=\pm 93.$$

(1) 當$n=1$時，$(a_0,a_1)=(93,-186)$，$(-93,186)$. 即有 2 個一次多項式

$$f(x)=-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=186(x-d_1)+93.$$

(2) 當 $n=2$ 時，$(a_0,a_1,a_2)=(93,0,-93)$，$(93,-186,93)$，$(93,-186,186)$，$(-93,0,93)$，$(-93,186,-93)$，$(-93,186,-186)$. 即有 6 個二次多項式

$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$
$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93.$$

(3) 當 $n=3$ 時，$(a_0,a_1,a_2,a_3)=(93,0,0,-31)$，$(93,0,-93,62)$，$(93,0,-93,93)$，$(93,-186,93,-31)$，$(93,-186,186,-93)$，$(93,-186,186,-124)$，$(-93,0,0,31)$，$(-93,0,93,-62)$，$(-93,0,93,-93)$，$(-93,186,-93,31)$，$(-93,186,-186,93)$，$(-93,186,-186,124)$. 即有 12 個三次多項式

$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93,$$
$$f(x)=62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$
$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+93,$$
$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93,$$

$$f(x)=-62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$
$$f(x)=-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93(x-d_1)(x-d_2)-93,$$
$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)+186(x-d_1)-93.$$

(4) 當 $n=4$ 時，$(a_0,a_1,a_2,a_3,a_4)=$ $(93,0,0,-31,31)$，$(93,-186,186,-93,31)$，$(93,-186,186,-124,62)$，$(-93,0,0,31,-31)$，$(-93,186,-186,93,-31)$，$(-93,186,-186,124,-62)$，即有 6 個四次多項式

$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+93,$$
$$f(x)=31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)-124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)+186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$-186(x-d_1)+93,$$
$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-93,$$
$$f(x)=-31(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+93(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$+186(x-d_1)-93,$$
$$f(x)=-62(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)(x-d_4)+124(x-d_1)(x-d_2)(x-d_3)-186(x-d_1)(x-d_2)$$
$$\cancel{+186(x-d_1)-93}.$$

(5) 現在我們證明當 $n\ge 5$，沒有滿足條件的 n 次多項式 $f(x)$．假設存在，則由已知條件得

$$a_1+a_0=f(d_2)=\pm 93; \qquad (1)$$
$$2a_2+2a_1+a_0=f(d_3)=\pm 93; \qquad (2)$$
$$6a_3+6a_2+3a_1+a_0=f(d_4)=\pm 93; \qquad (3)$$
$$24a_4+24a_3+12a_2+4a_1+a_0=f(d_5)=\pm 93; \qquad (4)$$
$$\vdots$$
$$n!a_n+\frac{n!}{1!}a_{n-1}+\frac{n!}{2!}a_{n-2}+\cdots+\frac{n!}{(n-1)!}a_1+a_0=f(d_{n+1})=\pm 93. \qquad (n)$$

由[(n)式 $-C_1^n\times(n-1)$ 式 $+C_2^n\times(n-2)$ 式 $-\cdots+(-1)^{n-1}C_{n-1}^n\times(1)$式]可得

$$n!a_n+(-1)^{n+1}a_0=(\pm 1\pm C_1^n\pm C_2^n\pm\cdots\pm C_{n-1}^n)\cdot 93.$$

因此，

$$a_n=\frac{(\pm 1\pm C_1^n\pm C_2^n\pm\cdots\pm C_{n-1}^n\pm 1)}{n!}\cdot 93.$$

故，當 $n=5$ 時，

$$a_5=\frac{\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1}{40}\cdot 31.$$

因為 a_5 是一整數，$\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1$ 必須是 40 的倍數，其唯一可能是

$$\pm 1\pm 5\pm 10\pm 10\pm 5\pm 1=0,$$

即 $a_5=0$, 不合. 當 $n=6$ 時,

$$a_6=\frac{\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1}{240}\cdot 31.$$

因為 a_6 是一整數, $\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1$ 必須是 240 的倍數, 其唯一可能是

$$\pm1\pm6\pm15\pm20\pm15\pm6\pm1=0;$$

即 $a_6=0$, 不合. 當 $n=7$ 時,

$$a_7=\frac{\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1}{1680}\cdot 31.$$

因為 a_7 是一整數, $\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1$ 必須是 1680 的倍數, 其唯一可能是

$$\pm1\pm7\pm21\pm35\pm35\pm21\pm7\pm1=0;$$

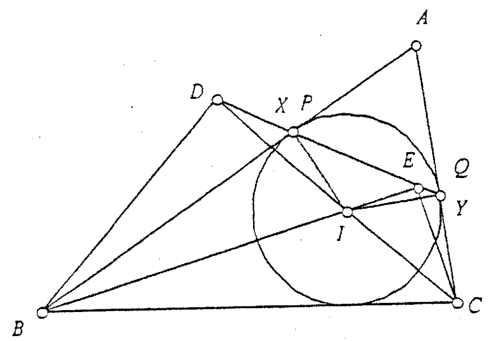
即 $a_7=0$, 不合. 當 $n\ge8$ 時,

$$\left|a_n\right|\le\frac{(1+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_{n-1}^n+1)\cdot 93}{n!}=\frac{2^n\cdot 93}{n!}<1.$$

因為 a_n 是一整數, 故 $a_n=0$, 不合.

【問題二】: 在某一個 ΔABC 中, 過頂點 B 作一直線與 $\angle C$ 的平分線垂直, 垂足為 D; 過頂點 C 作一直線與 $\angle B$ 的平分線垂直, 垂足為 E. 設點 D 在 ΔABC 的外部, 點 E 在 ΔABC 的內部且 ΔABC 的內切圓在邊 $\overline{AB}$ 、 $\overline{CA}$ 上的切點分別為點 P 、 Q. 試證: 直線 DE 通過 P 、 Q 兩點.

【參考解答】:



設直線 DE 與 $\overline{AB}$ 交於 X, 與 $\overline{CA}$ 交於 Y, 而 I 為 ΔABC 的內心. 我們僅需證明點 P 與點 X 重合, 且點 Q 與點 Y 重合. 因為 $\angle BDC=\angle CEB=90°$, 所以 D、E、C、B 四點共圓. 於是, 可得

$$\angle XDI=\angle EDC=(1/2)\angle ABC=\angle XBI.$$

由此可知, B、I、X、D 四點共圓. 因此, $\angle IXB=\angle IDB=90°$, 即 $\overline{IX}\perp\overline{AB}$, 亦即 ΔABC 的內切圓與 $\overline{AB}$ 切於 X 點, 因而點 P 與點 X 重合. 另一方面, 由 D、E、C、B 四點共圓, 可得

$$\angle YEI=180°-\angle DEB=180°-\angle DCB=180°-(1/2)\angle ACB=180°-\angle YCI.$$

由此可知 C、I、Y、E 四點共圓. 因此, $\angle IYC=\angle IEC=90°$, 即 $\overline{IY}\perp\overline{AC}$, 亦即 ΔABC 的內切圓與 $\overline{AC}$ 切於 Y 點, 因而點 Q 與點 Y 重合.

【問題三】：正八邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7A_8$ 的內部可被它的對角線分割成 80 個區域. 試求所有可能的正整數 n，使得我們可將其中 n 個區域塗色後，滿足：每一個 $\Delta A_iA_jA_k$ 的內部都恰有一個塗色的區域.

【參考解答】：考慮 6 個互不重疊的三角形：$\Delta A_1A_2A_3$，$\Delta A_1A_3A_4$，$\Delta A_1A_4A_5$，$\Delta A_1A_5A_6$，$\Delta A_1A_6A_7$，$\Delta A_1A_7A_8$. 因每一個三角形的內部都有一個塗色的區域，故 $n\geq 6$. 另一方面，若 $n\geq 7$，則由鴿籠原理可知上述的 6 個三角形中，必有一個三角形有兩個塗色的區域，故 $n\leq 6$. 以下證明 $n=6$ 是可能的. 令

$$S_p=\Delta A_1A_2A_{p+2}\cap\Delta A_{p+1}A_{p+2}A_{p+3},\ \forall\ p=1,2,\ \cdots,6;$$

則將 $S_1,S_2,\cdots,S_6$ 塗色即可滿足所求. 事實上，考慮任一 $\Delta A_iA_jA_k$，其中 $1\leq i<j<k\leq 8$.

(i) 當 $i=1$ 時($k\geq 3$)，則 S_{k-2} 是 $\Delta A_iA_jA_k$ 唯一的塗色區域.

(ii) 當 $i\geq 2$ 時($j\geq 3$)，則 S_{j-2} 是 $\Delta A_iA_jA_k$ 唯一的塗色區域.

下圖顯示可能的 6 個塗色區域.