九十二學年度高級中學數學科能力競賽決賽
獨立研究（二）參考解答

【問題一】：設多項式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，其中 $a\geq 0$，$b\geq 0$，且 $f(x)=0$ 的三根都是實數. 試證：$f(2)\geq 27$.

【參考解答】：因為 $f(x)$ 的係數都為非負，所以 $f(x)=0$ 的三根都是負實數，設為 $-r_1$，$-r_2$，$-r_3$. 由根與係數的關係可知

$$\begin{cases} a=r_1+r_2+r_3; \\ b=r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1; \\ 1=r_1r_2r_3. \end{cases}$$

由算幾不等式可得,

$$\frac{a}{3}=\frac{r_1+r_2+r_3}{3}\geq\sqrt[3]{r_1r_2r_3}=1,$$

$$\frac{b}{3}=\frac{r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}{3}\geq\sqrt[3]{r_1^2r_2^2r_3^2}=1,$$

因而，$a\geq 3$ 且 $b\geq 3$. 由此可得

$$\begin{aligned} f(2)&=2^3+a\cdot 2^2+b\cdot 2^1+1 \\ &\geq 2^3+3\cdot 2^2+3\cdot 2^1+1 \\ &=(2+1)^3 \\ &=27. \end{aligned}$$

【問題二】：試求所有的整數 m，n，滿足方程式 $3n^3-m^2+18n-6m-30=0$.

【參考解答】：

$3n^3-m^2+18n-6m-30=0$ 有整數解

$\Leftrightarrow m^2+6m-(3n^3+18n-30)=0$ 有整數解.

$\Leftrightarrow m=\dfrac{-6\pm\sqrt{36+4(3n^3+18n-30)}}{2}$ 為整數，$36+4(3n^3+18n-30)\geq 0$

且 $36+4(3n^3+18n-30)=2^2\cdot 3\cdot(n^3+6n-7)$ 為完全平方數.

$\Rightarrow n^3+6n-7\geq 0$ 且 n^3+6n-7 為 3 的倍數.

$\Leftrightarrow n^3-1\geq 0$ 且 n^3-1 為 3 的倍數.

為此我們可設 $n=3k+1$，其中 k 為整數. 由於

$$3n^3+18n-21=3^4k(k^2+k+1),$$

所以 $k(k^2+k+1)$ 為一完全平方數. 若 $k\neq 0$，則 k 與 k^2+k+1 互質. 因為 k^2+k+1 恆為正，得 k 與 k^2+k+1 均為完全平方數. 令 $k^2+k+1=t^2$，其中 t 為正整數，則 $k^2<k^2+k+1=t^2<(k+1)^2$，而得 $k<t<k+1$ 之矛盾結果. 故 $k=0$，即 $n=1$. 當 $n=1$ 時，$3n^3+18n-21=0$ 為完全平方數. 此時，$m=-3$.

【問題三】：每一個由正整數所形成的集合都有一個「**交錯和**」，它的定義如下：「將此集合中的數，由大到小排列，交錯的加、減得到一個結果，稱為此集合的交錯和」. 例如：集合$\{1,2,4,6,9\}$的交錯和為$9-6+4-2+1=6$；集合$\{6\}$的交錯和為 6; 空集合的交錯和視為 0. 試求$\{1,2,\cdots,2004\}$所有子集合交錯和的總和.

【參考解答】：將$\{1,2,\cdots,2004\}$所有子集合分成2^{2003}組 S 及$S\bigcup\{2004\}$，其中S為$\{1,2,\cdots,2003\}$的子集合，則這兩個子集合交錯和的總和為 2004. 所以$\{1,2,\cdots,2004\}$所有子集合交錯和的總和為2004×2^{2003}.