九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

筆試試題（一）【參考解答】

一、【解答】

令質數$ab+bc+ca=p$，則由條件所給的方程式可得

$(a+b)^2=c^2+p$，因此

$$p=(a+b+c)\ (a+b-c)$$

又因為$1\le a+b-c<a+b+c$，所以我們可得

$$a+b-c=1,\qquad a+b+c=p,$$

即有

$$a+b+c=ab+bc+ca$$

因此

$$a(1-b)+b(1-c)+c(1-a)=0$$

但a,b,c為正整數，所以$a=b=c=1$，此時$ab+bc+ca=3$為質數。

二、【解答】

1.因為$\angle PCB+\angle PBC=\angle PBA+\angle PBC=\angle B$，所以

$\angle CPB=180^0-\angle B=90^0+\angle C>90^0$，即$\angle CPB$為鈍角。

2.設O為ΔCPB的外心，由$\angle CPB>90^0$知O與P這兩點分別在直線

BC的兩側（即在不同的半平面）。

3.因為$\angle BOC=CPB$，$\angle CPB=\frac{1}{2}(360^0-CPB)$，所以

$90^0+\angle C=\frac{1}{2}(360^0-\angle BOC)$，即$\angle BOC=180^0-2\angle C.$

4.在等腰三角形BOC中，$\angle CBO=\frac{1}{2}(180^0-\angle BOC)=\angle C$，故

$\overline{OB} \perp \overline{AB}$，於是 $\overline{OB} = \dfrac{\frac{1}{2}\overline{BC}}{\cos\angle OBC} = \dfrac{\overline{BC}}{2\cos\angle C} = \dfrac{\overline{BC}^2}{2\overline{AC}}.$

5.因為

$$\overline{OA} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{BO}^2} = \frac{\sqrt{4\overline{AC}^2\,\overline{AB}^2 + \overline{BC}^4}}{2\overline{AC}} \le \overline{AP} + \overline{PO}$$

$$= \overline{AP} + \overline{OB} = \overline{AP} + \frac{\overline{BC}^2}{2\overline{AC}}.$$

因此

$$\sqrt{4\overline{AC}^2\,\overline{AB}^2 + \overline{BC}^4} \le 2\overline{AC}\cdot\overline{AP} + \overline{BC}^2,$$

即

$$4\overline{AC}^2\,\overline{AB}^2 + \overline{BC}^4 \le 4\overline{AC}^2\cdot\overline{AP}^2 + 4\overline{AC}\cdot\overline{AP}\cdot\overline{BC}^2 + \overline{BC}^4.$$

化簡後即可得證。

三、【解答】

設 $U = a_1 + a_2 + \cdots + a_{30}$ 表示小華這 30 天內最多可做的數學題目數，其中 a_i 為第 i 天做的數學題目數。若有一 $i \in \{1,2,3,\cdots,27\}$，使得 $a_i > 7$，則依條件(ii)，

$$a_{i+1} \le 5，\quad a_{i+2} \le 5,\quad a_{i+3} \le 5$$

於是，

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} \le 12 + 5 + 5 + 5 = 27.$$

但若取

$$U^* = b_1 + b_2 + \cdots + b_{30},$$

其中 $b_i = b_{i+1} = b_{i+2} = b_{i+3} = 7$，而其它的 $b_j = a_j$，則 $U < U^*$，此與 U 的選取矛盾！因此，

$$a_i \le 7, \quad \forall i = 1,2,3,\cdots,27.$$

又

$$\max\{a_{28} + a_{29} + a_{30}\} = 7 + 7 + 12 = 26.$$

因此，所求的最大值$S = 7 \cdot 27 + 26 = 215.$

另一方面，設$L = a_1 + a_2 + \cdots + a_{30}$表示小華這 30 天內最少可做的數學題目數, 其中a_i為第i天做的數學題目數。若有一

$i \in \{1,2,3,\cdots,28\}$，使得$a_i < 5$，則依條件(iii)，

$$a_{i+1} \ge 7, \quad a_{i+2} \ge 7.$$

於是，

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \ge 1 + 7 + 7 = 15.$$

但若取

$$L^* = b_1 + b_2 + \cdots + b_{30},$$

其中$b_i = b_{i+1} = b_{i+2} = 5$，而其它的$b_j = a_j$，則$L \ge L^*$，$L$由$L^*$取代時，其值不會變大。故不失一般性，可令

$$a_i \ge 5, \quad \forall i = 1,2,3,\cdots,28.$$

又

$$\min\{a_{29} + a_{30}\} = 5 + 1 = 6.$$

因此，所求的最小值$L = 5 \cdot 28 + 6 = 146.$