九十學年度全國高中數學科能力競賽決賽

口試試題【參考解答】

一、【解答】

因為所找出質數的乘積是6 的倍數，因此，其中必有質數2與3。由 $2\cdot 3\neq 6(2+3)$，故必有其它的質數，令其它的質數中最大者為p，則由$2\cdot 3\cdot p\neq 6(2+3+p)$得知：仍有其它的質數。設剩下的質數之積為 a，而和為b，則有

$$2\cdot 3\cdot p\cdot a=6(2+3+p+b).$$

由此可得$pa=5+p+b$。注意：$a\geq b$。因此，

$$pb\leq pa=5+p+b.$$

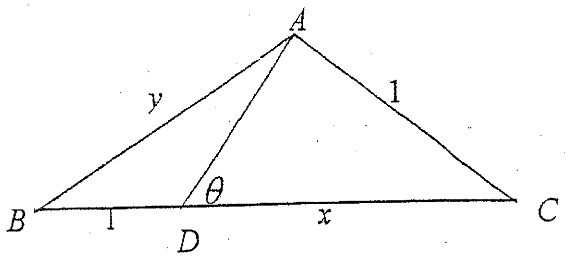
於是，

$$(p-1)(b-1)\leq 6.$$

由此可得$p\leq 7$。經檢驗：僅當$p=7$時，$b=2$時，得四個質數2,2,3,7 滿足所求。

二、【解答】

由已知條件作圖如右：



設$\angle ADC=\theta$

$\overline{DC}=x$

$\overline{AB}=y$

由正弦定律得$\dfrac{x}{\sin 90^o}=\dfrac{1}{\sin\theta}$及$\dfrac{1}{\sin 30^o}=\dfrac{y}{\sin(\pi-\theta)}=\dfrac{y}{\sin\theta}$

$$\Rightarrow y=\frac{2}{x}.$$

又由餘弦定律而有：$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{AB} \cos \angle BAC$

即 $(1+x)^2 = 1^2 + y^2 - 2 \cdot 1 \cdot y \cdot \cos 120^o$

$= 1 + y^2 - y \cdots (1)$

以 $y = \dfrac{2}{x}$ 代入(1)式化得

$$x^4 + 2x^3 - 2x - 4 = 0$$

即為 $(x^3 - 2)\ (x+2) = 0$

求出 $\overline{CD} = x = \sqrt[3]{2}$ 為所求。