

教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽決賽  
筆試試題(二)[參考解答]

4. 參考解答

令  $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 \in S[x]$ , 且設  $f(x) = 0$  的根為  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \in S$ .

由根與係數的關係, 得  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = \frac{-a_{n-1}}{a_n}$ ,

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = \frac{a_{n-2}}{a_n}$$

因此  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = \frac{a_{n-2}^2}{a_n^2} - \frac{2a_{n-2}}{a_n}$

設  $M = \max\{|k_1|, |k_2|, \dots, |k_{2000}|\}$

則由  $1 \leq |a_i| \leq M, \forall i = 0, 1, 2, \dots, n$ , 得  $n \leq x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq \frac{a_{n-2}^2}{a_n^2} + 2 \frac{|a_{n-2}|}{a_n} \leq M^2 + 2M$

由此得  $n+1 \leq (M+1)^2$  於是  $M+1 \geq \sqrt{n+1}$

故得  $M \geq \sqrt{n+1} - 1$

## 5. 參考解答

設  $p(x)$  為一實係數多項式, 且  $p(x) \neq 0$

當  $x=1$  代入上述條件得  $p(2)=0$  當  $x=2$  代入上述條件得  $p(4)=0$

當  $x=4$  代入上述條件得  $p(8)=0$

令  $p(x)=(x-2)(x-4)(x-8)Q(x)$  其中  $Q(x)$  為實係數多項式且,  $Q(x) \neq 0$

因此  $p(2x)=(2x-2)(2x-4)(2x-8)Q(2x)$  又  $(x-8)p(2x)=8(x-1)p(x)$

代入化簡整理得  $Q(2x)=Q(x)$

其次, 欲証  $Q(x)$  為一常數

假設  $Q(x)$  有異於 0 之根, 即  $\exists \alpha \neq 0 \Rightarrow Q(\alpha)=0$

則  $2\alpha, 4\alpha, 8\alpha, \dots$  必為  $Q(x)$  的根(因為  $Q(2x)=Q(x)$ )

即表示  $Q(x)$  有無限多個根, 故  $Q(x)=0$  (不合)

因此  $Q(x)$  沒有異於 0 的根.

令  $Q(x)=ax^n$ , 又  $Q(2x)=Q(x)$ , 得  $2^n ax^n = ax^n$

即  $a(2^n - 1) = 0$  所以  $n=0$  (因為  $n \neq 0$ )

即  $Q(x)=k$  為一異於 0 的常數 故  $p(x)=k(x-2)(x-4)(x-8)$ ,  $k \neq 0$

但  $p(x)=0$  滿足已知條件 故  $p(x)=k(x-2)(x-4)(x-8)$ ,  $k$  為任意常數

## 6. 參考解答

在  $(a+b+c)^n$  的展開式中, 每一項都是  $a^p b^q c^r$

其中  $p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$  皆為整數且  $n=p+q+r$

因為  $b|a^2, c|b^3, a|c^4 \Rightarrow$

$$a|a \quad b|b \quad a|c^4$$

$$b|a^2 \quad a|b^{12} \quad a|b^8$$

$$c|a^6 \quad c|b^3 \quad c|c$$

若  $p > 0, q > 0, r > 0$  時,  $a^p b^q c^r$  必為  $abc$  之倍數, 只需討論至少有一者為 0 之情形

若  $p=r=0$ , 因為  $b^n$  為  $abc$  之倍數, 所以  $n \geq 16$

其次, 證明  $n$  的最小值為 16.