3.**參考解答**

因爲$p^2+5pq+q^2=(p-q)^2+7pq=7^{2001}$

則 $7|(p-q)^2$,所以 $7|(p-q)$

又$7^2|(p-q)^2$　因此 $7^2|7pq$ 即 $7|pq$

又 $p\equiv q(mod\ 7)$ 則$7^2|pq$ 因此 $7^3|7pq$ 所以 $7^3|(p-q)^2$

即$7^3|(p-q)$如此繼續下去

得 $7^{1000}|p-q$ 但 7^{1001} 不能整除$p-q$

(假設$7^{1001}|p-q$,則$7^{2002}|(p-q)^2$與已知條件矛盾) 因此$(p,q)=7^{1000}$

欲証 $p=q=7^{1000}$

不妨假設$p\geq q$,令$p=7^{1000+n}$,s,$q=^{1000}$,t,其中$(s,t)=1$, n爲非負整數

則 $7^{2001}=(p-q)^2+7pq=7^{2000}(7^n\cdot s-t)^2+7^{2001+n}\cdot s\cdot t\geq 7^{2001+n}\cdot s\cdot t$

因此$n=0$, $s=t=1$　故 $p=q=7^{1000}$

4.**參考解答**

$$\frac{1}{(\frac{b+c}{a}-1)}+\frac{1}{(\frac{c+a}{b}-1)}+\frac{1}{(\frac{a+b}{c}-1)}=\frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{-b+c+a}+\frac{c}{-c+a+b}$$

令 $x=-a+b+c$, $y=-b+c+a$, $z=-c+a+b$

則$\frac{a}{-a+b+c}+\frac{b}{-b+c+a}+\frac{c}{-c+a+b}=\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}$

$$=\frac{1}{2}(\frac{y}{x}+\frac{x}{y})+\frac{1}{2}(\frac{z}{y}+\frac{y}{z})+\frac{1}{2}(\frac{x}{z}+\frac{z}{x})\geq 1+1+1\geq 3$$

上式等號成立的充要條件爲 $x=y=z$

當 $a=b=c$時

$\frac{1}{(\frac{b+c}{a}-1)}+\frac{1}{(\frac{c+a}{b}-1)}+\frac{1}{(\frac{a+b}{c}-1)}$有最小值 3