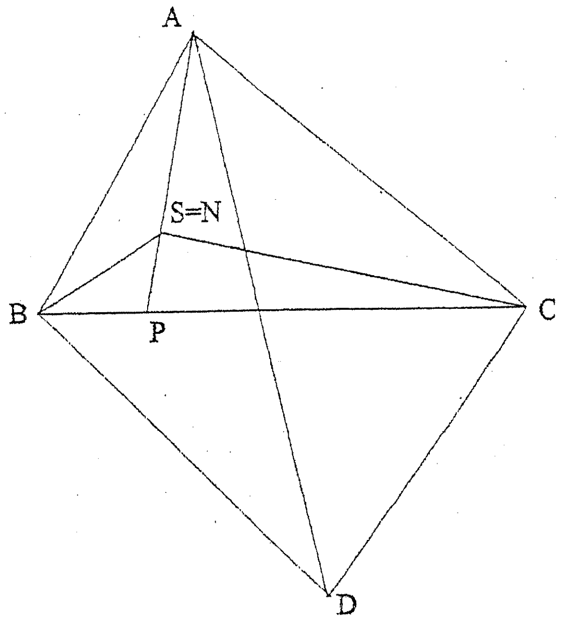
教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽決賽獨立研究試題(一)參考解答

1. **參考解答**

需証：N 點必 $\overline{AM}$ 在對稱於 $\angle BAC$ 的平分線之對稱線段 $\overline{AP}$ 上

(如圖)



令 D 點表示 A 點對稱於 M 點的對稱點

在 $\overline{AP}$ 上取一點 S,使得 $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{AC}}{\overline{AD}}$

因此,$\triangle BAS \sim \triangle DAS$

所以 $\angle ABS = \angle ADC = \angle MAB$(因為 M 為 $\overline{BC}$ 之中點)

同理：因為 $\dfrac{\overline{AS}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{AB}}{\overline{AD}}$

所以 $\triangle ACS \sim \triangle ADB$ $\angle ACS = \angle ADB = \angle MAC$

因此 N 與 S 重合(由已知條件知)

故 $\angle BAN = \angle CAM$

2. 參考解答

令$f(x)=ax^2+bx+c$,

A: $$f(x)\to x^2f(1-\frac{1}{x})=x^2[a(1-\frac{1}{x})^2+b(1-\frac{1}{x})+c]$$

$$=a(x-1)^2+bx(x-1)+cx^2$$

$$=(a+b+c)x^2-(2a+b)x+a$$

其判別式爲 $\triangle=(2a+b)^2-4a(a+b+c)$

$$=4a^2+4ab+b^2-4a^2-4ab-4ac$$

$=b^2-4ac$ (爲 $f(x)$ 之判別式)

B: $$f(x)\to(x+1)^2f(\frac{1}{x+1})=(x+1)^2[a(\frac{1}{x+1})^2+b(\frac{1}{x+1})+c]$$

$$=a+b(x+1)+c(x+1)^2$$

$$=c+(2c+b)x+(a+b+c)$$

其判別式爲$\triangle=(b+2c)^2-4c(a+b+c)$

$$=b^2+4bc+4c^2-4ac-4bc-4ac-4c^2$$

$=b^2-4ac$ (即爲的判別式)

所以不論經過轉換器或其判別式不變

因爲 x^2+7x+1 的判別式爲$\triangle=7^2-4=45$

而$x^2+40x+135$的判別式爲$\triangle=40^2-4\times135=1060\neq45$

故不可能辦到.