# 教育部八十九學年度高級中學數學科能力競賽決賽

# 口試試題 參考解答

1．【參考解答】

解：設 O 為 $\Delta ABC$ 外接圓的圓心，則由餘弦定律得

$$\cos\angle BAO=\frac{9+3-3}{2\times 3\times\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad 故 \quad \angle BAO=30^\circ ,$$

再由餘弦定律可得 $\overline{OD}=1$，因此 $\Delta OBD$ 為等腰三角形，

其次觀察 $\Delta OCD$ 各邊的長度，由畢氏定理得知它為一個直角三角形，

$\angle CDO$ 為直角，因 $\angle ADO=\angle DOB+\angle DBO=60^\circ$，得 $\angle CDB=30^\circ$，

由此可得 $\Delta ABC$ 邊 $\overline{AB}$ 上的高為 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

故 $\Delta ABC$ 面積等於 $\dfrac{1}{2}\times 3\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}}{4}$

2．【參考解答】

提示一：求 $x$ 的個位數字 $b$

提示二：設 $x=1000y+26b$，其中 $y$ 為 $x$ 的前四位數．

解：因為 $x$ 為 48 的倍數，故 $x$ 為 4 的倍數，

因此，$x$ 的末兩位數也必為 4 的倍數，由此可知：$x$ 的個位數字 $b=0$ 或 4 或 8，

設 $x=1000y+26b$，其中 $y$ 為 $x$ 的前四位數，

注意：$a$ 為 $y$ 的個位數字，

（i） 若 $b=0$，則由 $\dfrac{1000y+260}{48}\in N$ 可得 $\dfrac{250y+65}{12}\in N$，矛盾！

（ii）若 $b=8$，則由 $\dfrac{1000y+268}{48}\in N$ 可得 $\dfrac{250y+67}{12}\in N$，矛盾！

因此，若 $b=4$，由 $\dfrac{1000y+264}{48}\in N$ 可得 $\dfrac{125y+33}{6}\in N$；

於是有 $\dfrac{5y+3}{6}\in Z$，

因此，$y=6k-3$，其中 $k=168,169,\ldots,1667$，故 $y$ 與 $a$ 都是奇數，

事實上滿足條件的七位數 $x$ 共有 1500 個，

其中最小七位數 $x=1005264$，而最大七位數 $x=9999264$．