【獨立研究七參考解答】

令三根為α,β,γ 且$\alpha\geq\beta\geq\gamma$

$\therefore \alpha+\beta+\gamma=30 \qquad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=281$

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=900-562=338$

又$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \therefore \alpha^2=\dfrac{338}{2}=169$

$\therefore \alpha=13 \qquad \beta+\gamma=30-13=17$

$\because \beta^2+\gamma^2=169 \qquad \dfrac{1}{2}\beta\gamma=\dfrac{(\beta+\gamma)^2-(\beta^2+\gamma^2)}{4}=\dfrac{17^2-169}{4}=\dfrac{120}{4}=30$

【獨立研究八參考解答】

令$\alpha=a_1-b_2,\beta=a_2-b_1,\gamma=b_3-a_4,\delta=b_4-a_3$

欲證：$\alpha+\beta\geq\gamma+\delta$ 由題意知$(b_2+\alpha)a_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4$

$\Rightarrow \alpha a_2a_3a_4+b_2(\beta+b_1)a_3a_4=b_1b_2b_3b_4$

$\Rightarrow \alpha a_2a_3a_4+\beta b_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4-b_1b_2a_3a_4=b_1b_1(b_3b_4-a_3a_4)=b_1b_2[b_4(b_3-a_4)+a_4(b_4-a_3)]$

$=b_1b_2b_4\gamma+b_1b_2a_4\delta$

$\Rightarrow \alpha+\dfrac{b_2}{a_2}\beta=\dfrac{b_1b_2b_4}{a_2a_3a_4}\gamma+\dfrac{b_1b_2a_4}{a_2a_3a_4}\delta=\dfrac{a_1}{b_3}\gamma+\dfrac{b_1b_2}{a_2a_3}\delta \qquad (\because a_1a_2a_3a_4=b_1b_2b_3b_4)$

(i) 若$a_2a_3\leq b_1b_2$,則$\alpha+\beta\geq\alpha+\dfrac{b_2}{a_2}\beta=\dfrac{a_1}{b_3}\gamma+\dfrac{b_1b_2}{a_2a_3}\delta\geq\gamma+\delta$

(ii)

若$a_2a_3>b_1b_2$,則$a_2>\dfrac{b_1b_2}{a_3},\beta=a_2-b_1>\dfrac{b_1b_2}{a_3}-b_1=\dfrac{b_1}{a_3}(b_2-a_3)>\dfrac{b_1}{a_3}\delta$

$\therefore \alpha+\beta=\alpha+\dfrac{b_2}{a_2}\beta+\left(1-\dfrac{b_2}{a_2}\right)\beta\geq\dfrac{a_1}{b_3}\gamma+\left[\dfrac{b_1b_2}{a_2a_3}+\left(\dfrac{a_2-b_2}{a_2}\right)\cdot\dfrac{b_1}{a_3}\right]\delta=\dfrac{a_1}{b_3}\gamma+\dfrac{b_1}{a_3}\delta\geq\gamma+\delta$