

獨立研究試題解答

【獨立研究一參考解答】

對於任意正整數 n ，令 $a_n = n^3 - 8n^2 + 22n - 21$ 。因式分解得 $a_n =$

$(n-3)(n^2 - 5n + 7) = (n-3)((n-2)(n-3) + 1)$ 。顯然 $a_1 = -6$ 與 $a_2 = -1$ 都不是完全平方數；而 $a_3 = 0$ 為完全平方數。假設 $n > 3$ 且 a_n 為完全平方數。因為 $n-3$ 與 $n^2 - 5n + 7$ 互質，得 $n^2 - 5n + 7$ 亦為完全平方數。因 $n > 3$ ，得 $(n-3)^2 < (n-3)^2 + n - 2 = n^2 - 5n + 7 = (n-2)^2 + 3 - n < (n-2)^2$ 。即 $n^2 - 5n + 7$ 介於兩相鄰平方數之間，這是不可能的。因此 $n = 3$ 為所求。

【獨立研究二參考解答】

令 $f(x, y) = \frac{xy-1}{(x-1)(y-1)}$, $x > 1, y > 1$ $\because (x+1)(y+1) \mid xy-1 \therefore f(x, y)$ 為一正整數

$$\because f(x, y) = \frac{xy-x-y+1}{(x-1)(y-1)} + \frac{x+y-2}{(x-1)(y-1)} = 1 + \frac{(x-1)+(y-1)}{(x-1)(y-1)} = 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1}, \therefore \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \in \mathbb{N}$$

設 $x \leq y$ ，因 $x > 1, 1 \leq \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} \leq \frac{2}{x-1}$ 即 $x-1 \leq 2$ 故 $1 < x \leq 3$

(1) 當 $x = 3$, $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{y-1} \in \mathbb{N}$ ，且 $y \geq x = 3$ ，故 $y = 3$ 為唯一解

(2) 當 $x = 2$, $\frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-1} = 1 + \frac{1}{y-1} \in \mathbb{N}$, $\therefore \frac{1}{y-1} \in \mathbb{N}$ 又 $y \geq 2 \therefore y = 2$

故 $(x, y) = (3, 3), (2, 2)$