教育部八十七學年度高級中學
數學競賽決賽筆試試題解答(一)

[筆試問題一解答]:設 $\frac{p(p+1)+2}{2}=k^2$,其中k爲大於1的正整數.則

$$p(p+1)=2k^2-2=2(k-1)(k+1).$$

因爲p是質數,得$p=2$,或$p\mid k-1$,或$p\mid k+1$.

(1) 當$p=2$時,得$k=2$.

(2) 當$p\mid k-1$時,得$k-1\geq p$.因此,

$$p(p+1)\leq (k-1)k<2(k-1)(k+1)=p(p+1) \quad \text{矛盾 !}$$

(3) 當$p\mid k+1$時,得$k+1\geq p$.因此,

$$2(k-1)(k+1)=p(p+1)\leq (k+1)(k+2).$$

從而得$k\leq 4$.再由p與k的關係,可得$p=5$,而$k=4$.

因此,所求$p=2$或5.

[筆試問題二證明]:因爲O與A都在圓O的內部,故以OA爲直徑的圓不會通過圓O上的點M.於是,MO與MA不垂直.過A作MA的垂線,設與直線MO交於一點Q,由此可作出矩形$MAQP$.

設圓O過點M的直徑爲MN,且射線MA,MP分別與圓O交於另一點N',M',則$\angle MM'N=\angle MN'N=90^o$.因爲$\angle M'MN'=90^o$,故$\angle M'NN'=90^o$,得知$MN'NM'$爲一矩形.因爲圓心$O$是對角線$MN$的中點,故點$O$在另一對角線$M'N'$上,亦即$M'N'$也是圓$O$的一直徑.因爲點$A$在邊$MN'$上,故點$A$對圓心$O$的對稱點$B$必在邊$M'N$上.因爲

$$\frac{MP}{MM'}=\frac{PQ}{M'N}=\frac{MA}{MN'},$$

故PA與$M'N'$平行,而且

$$\frac{PA}{MN}=\frac{PA}{M'N'}=\frac{MP}{MM'}.$$

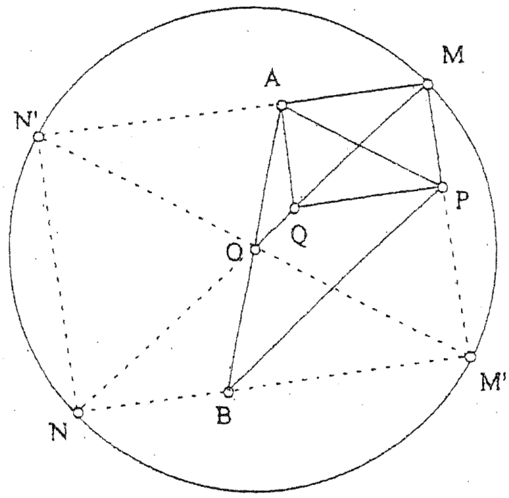
另一方面,因爲$MA=NB$,故

$$\frac{MP}{MM'}=\frac{MA}{MN'}=\frac{NB}{M'N},$$

於是, PB與MN平行, 而且

$$\frac{PB}{MN}=\frac{PM'}{MM'}=1-\frac{MP}{MM'}=1-\frac{PA}{MN}.$$

由此可知, $PA+PB=MN=$圓O的直徑, 此值爲定值.



[筆試問題三解答]: 顯然, 八個數字都相同的好數有9個, 即

$$11111111, 22222222, 33333333, \cdots\cdots, 99999999.$$

而其他的好數只有以下兩類, 且都恰由兩種數字組成:

(1) 一種數字出現3次, 另一種數字出現5次: 共有好數之個數(包含首位數爲0的'好'數)

$$\binom{8}{3}\cdot 10\cdot 9=5040.$$

(2) 兩種數字都出現4次: 共有好數之個數(含首位數爲0的'好'數)

$$\binom{8}{4}\cdot\frac{10\cdot 9}{2}=3150.$$

又首位數爲0的'好'數(此種數不能算是八位數)之個數有

$$\left[\binom{7}{2}+\binom{7}{3}+\binom{7}{4}\right]\cdot 9=819.$$

故所求好數有$9+5040+3150-819=7380$個.