八十六學年度高級中學數學競賽決賽筆試(一)
參考解答

1、 因$\overline{AD}$是C_1的直徑，$\overline{AM}\perp\overline{DO_2}$，$\Delta ADO_2$ 面積$=\frac{1}{2}\overline{DO_2}\cdot\overline{AM}$

$$\overline{AM}=\frac{\Delta ADO_2}{2\,\overline{DO_2}}$$

$$=\frac{4\Delta ADO_2}{\overline{DO_2}}$$

$$\Delta AO_1O_2=\sqrt{\frac{3+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{7}$$

$$\cos A=\frac{\overline{AO_1}^2+\overline{AO_2}^2-\overline{O_1O_2}^2}{2\overline{AO_1}\,\overline{AO_2}}=\frac{1+2-4}{2\cdot1\cdot\sqrt{2}}=\frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

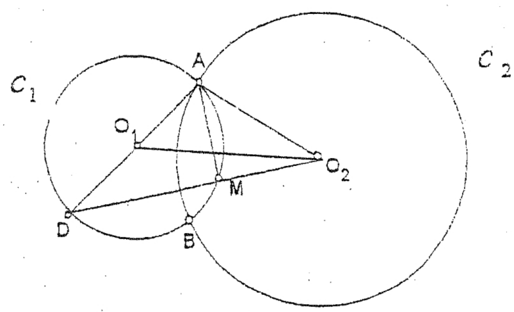
$$\overline{DO_2}^2=\overline{AD}^2+\overline{AO_2}^2-2\overline{AD}\cdot\overline{AO_2}\cos A$$

$$=4+2-2\cdot2\cdot\sqrt{2}\cdot\left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}\right)$$

$$=8$$

$$\overline{DO_2}=\sqrt{8}$$

$$\therefore\overline{AM}=\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}$$



2、$f(x)=0$的整數根只可能是$\pm p,\pm1$，但$f(x)=0$必無正根，所以只須檢驗-1和$-p$，考慮$f(-p)$

$$f(-p)=(-p)^p+a_{p-1}(-p)^{p-1}+\cdots+a_1(-a)+p\equiv p(1-a_1)\pmod{p^2}$$

因此若$f(-p)=0$，則必有$a_1=1$，此時$a_1=a_2=\cdots=a_p=1$

但$f(-p)=(-p)^p+a_{p-1}(-p)^{p-1}+\cdots+a_2(-p)^2$

$$\equiv a_2p^2\pmod{p^3}$$

$$\equiv p^2\pmod{p^3}$$

因此$f(-p)\neq0$

因此$f(x)=0$唯一整數根是-1

又

$$f(-1)=a_p(-1)^p+a_{p-1}(-1)^{p-1}+\cdots+a_1(-1)+p$$

$$=(p-a_1)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_{p-1}-a_p)$$

$$\geq0$$

而且"="成立，若且唯若 $a_1 = p$

$$\begin{cases} a_2 = a_3 \\ a_4 = a_5 \\ a_{p-3} = a_{p-2} \end{cases}$$

也就是要考慮 $a_{p-1} = a_p$

$$p \ge a_2 \ge a_4 \ge a_6 \ge \cdots \ge a_{p-3} \ge a_{p-1} \ge 1$$

的整數解個數，因此共有 $C_{p-1}^{p-1+\frac{p-1}{2}} = C_{p-1}^{\frac{3(p-1)}{2}}$

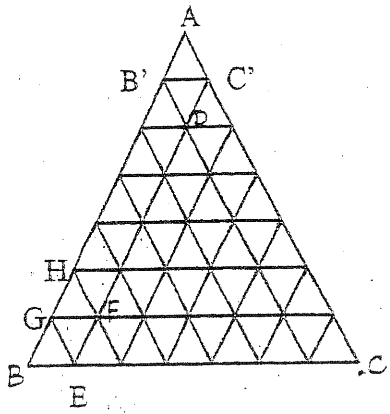
3、解答：$n = 2k+1$，其中 $k \in N$，而可設置 D 點位置的個數為 $\dfrac{n^2-1}{8}$

(i)當 $n = 2k+1$ 為奇數時，如圖一，將菱形 $BEFG$ 的四個頂點上之數字同時減1後，再將菱形 $GEFH$ 的四頂點上之數字同時加1，經此"運作"後（一次"運作"包含兩次"操作"），數字1由 B 點移至 H 點，而其他點的數字保持不變，經過這樣的 k 次"運作"後，數字1由 B 點移至 B' 點，而其他點的數字保持不變。同理，經過類似的 k 次"運作"後，數字1由 C 點移至 C' 點，而其他點的數字也保持不變，如此，只要將菱形 $B'DC'A$ 的四個頂點上之數字同時減1，則每一個點的標號數都變成0。

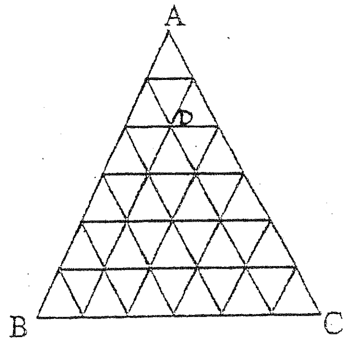
(ii)當 $n = 2k$ 為偶數時，如圖二，我們可以將每一頂點著上 a 或 b 或 c 或 d 色，使得每一最小菱形的四頂點都不同色，可設 A, B, C 都是著 a 色而點 D 是著 d 色的，則最初所有著 a 色的點之數字和與所有著 d 色的點之數字和相差 2，但易知一次的"操作"後，此差數 2 仍保持不變，故無法在有限次的"操作"後，將每一個點的標號數都變成 0。

又當 $n = 2k+1$ 時，如圖三，若數字1標示在某一點 D' 上，則只要從 D' 出發，經過有限次"運作"後，可將數字1由 D' 移至原 D 點，即可達成目標，因為這種"運作"是雙向的，故也可將數字1由 D 點移至 D' 點。事實上，一次"運作"相當於由出發點沿某一直線走兩單位長而到達另一頂點，故所有可放置 D 點的位置之個數為

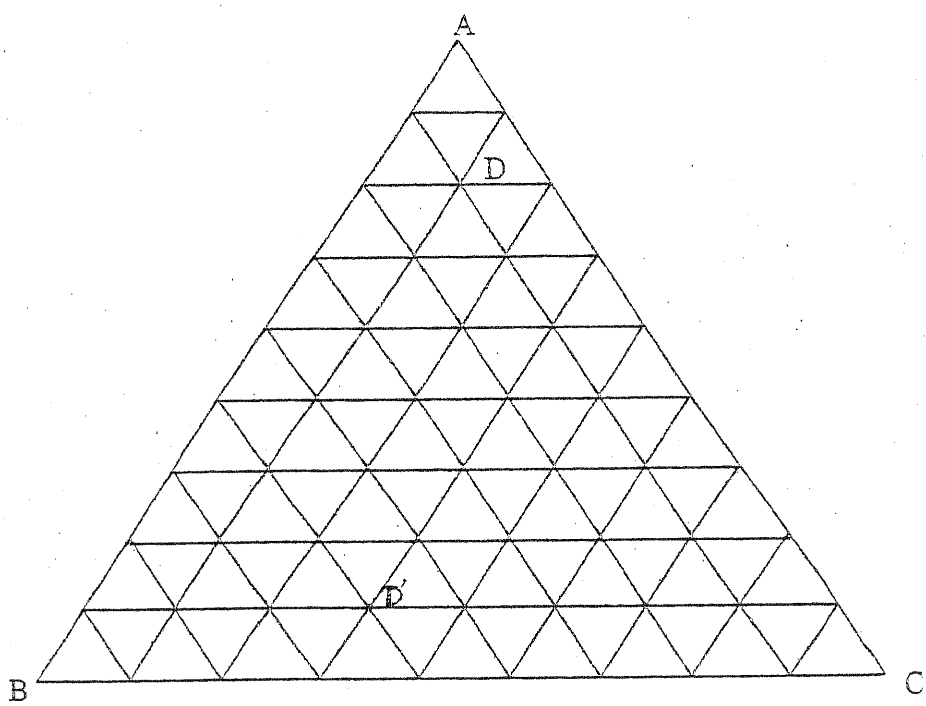
$$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2} = \frac{n^2-1}{8}$$



圖一 (n=7)



圖二 (n=6)



圖三 (n=9)