八十六學年度高級中學數學競賽決賽

獨立研究(第二部份)參考解答

6、(1)若k為整數，$k \ge 2$，則$2^k - 1 = 2(2^{k-1} - 1) + 1$，由假設之條件得

$a_{2^k-1} = 2a_{2^{k-1}-1} + 1$，因此

$$
\begin{aligned}
a_{2^{1998}-1} &= 2a_{2^{1997}-1} + 1 = 2(2a_{2^{1996}-2} + 1) + 1 \\
&= 2^2 a_{2^{1996}-1} + 2 + 1 \\
&= \cdots \\
&= 2^{1997} a_1 + 2^{1996} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{1997} + 2^{1996} + \cdots + 2 + 1 \\
&= 2^{1998} - 1
\end{aligned}
$$

(2)表$n = \alpha_m 2^m + \alpha_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + \alpha_1 2 + \alpha_0$，其中

$\alpha_i \in \{0,1\}, i = 0, \cdots, m-1, \alpha_m = 1$

1°. $\alpha_0 = 0$ 時

$$a_n = 2a_{\alpha_m 2^{m-1} + \alpha_{m-1} 2^{m-2} + \cdots + \alpha_1} - 1$$

2°. $\alpha_0 = 1$ 時

$$a_n = 2a_{\alpha_m 2^{m-1} + \alpha_{m-1} 2^{m-2} + \cdots + \alpha_1} + 1$$

由數學歸納法得

$$a_n = \beta_m 2^m + \beta_{m-1} 2^{m-1} + \cdots + \beta_1 \cdot 2 + \beta_0$$

其中$\begin{cases} \beta_i = d_i，若\ \alpha_i = 1 & (0 \le i \le m) \\ \beta_i = -1，若\ \alpha_i = 0, & \end{cases}$

由上述討論得

$$a_n = n \Leftrightarrow n = 2^m + 2^{m-1} + \cdots + 2 + 1 = 2^{m+1} - 1$$（m 為非負整數）

7、由已知條件(1)得知 P 之方程式型如

(1) $\quad a(x-2)^2 + b(y-2)^2 + 2c(y-2) = 0$

其中$a \ne 0$，利用(1) 式，可以計算出 P 點過 A 之切線斜率是

(2) $\quad m = \dfrac{-a(x_1 - 2)}{b(y_1 - 2) + c}$

利用已知條件(II)及(2)式，我們有下列等式

(3) $\quad \dfrac{-a(x_1 - 2)}{b(y_1 - 2) + c} = \dfrac{y_1 - 2}{x_1 - \dfrac{x_1 + 2}{2}}$

由(3)式得

(4) $\quad a(x_1 - 2)^2 + 2b(y_1 - 2)^2 + 2c(y_1 - 2) = 0$

因為點 A 在 P 上，由(4)式得知。

再由已知條件$y_1 > 2$，上式告訴我們$b = 0$，因此，P 之方程式為

$$a(x-2)^2+2c(y-2)=0$$

其中之a,c均不為零（否則 P 不通過點 A），所以 P 是拋物線。

8、$x_{k+1}\le 3x_k \Rightarrow x_{k+1}-x_k\le 2x_k$ ——————(1)

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k x_k = x_1+\sum_{k=1}^{n-1}(x_{2k+1}-x_{2k})-x_{2n}$$

由(1)

$$\le x_1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot x_{2k}-x_{2n}$$

$\because x_{2n}\ge 0$

$$\le x_1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot x_{2k} \text{ ——————(2)}$$

由於 $x_{2k+2}\le 3x_{2k+1}\le 3^2x_{2k}\quad \forall_{k=1,2,\cdots,(n-1)}$

由歸納法可知 $x_{2(k+1)}\le 3^{2k}\cdot x_1\le 3^{2k}\cdot 3x_1=3^{2k+1}$

由(2)，則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}x_k\le 1+\sum_{k=1}^{n-1}2\cdot 9^{k-1}\cdot 3$

$$=1+6\cdot\frac{9^{n-1}-1}{9-1}=1+\frac{(9^{n-1}-1\_\cdot 3)}{4}$$

取 $x_k=3^{k-1}\quad \forall_{k=1,2,\cdots,(2n-1)}$ 和 $x_{2n}=0$

則 $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}x_k=\sum_{k=1}^{2n-1}(-3)^{k-1}=\frac{-(-3)^{2n-1}+1}{4}=\frac{(9^{n-1}-1)\cdot 3}{4}+1$

9、設$a_1,a_2,\cdots,a_n$都是非負的實數，且

$$x=\sqrt[3]{a_1a_2^2}+\sqrt[3]{a_2a_3^2}+\cdots+\sqrt[3]{a_{n-1}a_n^2}+\sqrt[3]{a_na_1^2}$$
$$y=\sqrt[3]{a_1^2a_2}+\sqrt[3]{a_2^2a_3}+\cdots+\sqrt[3]{a_{n-1}^2a_n}+\sqrt[3]{a_n^2a_1}$$

試證：x,y中至多有一數超過$a_1,a_2,\cdots,a_n$。

證明：只需證明$x+y\le 2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$，對非負的實數$u,v$，我們有

$$0\le (u+v)(u-v)^2 \Leftrightarrow uv^2+vu^2\le u^3+v^3$$

令$u-\sqrt[3]{a},v=\sqrt[3]{b}$則可得

$$\sqrt[3]{ab^2}+\sqrt[3]{a^2b}\le a+b,\forall a,b\ge 0$$

故

$$x+y=(\sqrt[3]{a_1a_2^2}+\sqrt[3]{a_1^2a_2})+(\sqrt[3]{a_2a_3^2}+\sqrt[3]{a_2^2a_3})+\cdots+(\sqrt[3]{a_na_1^2}+\sqrt[3]{a_n^2a_1})$$
$$\le(a_1+a_2)+(a_2+a_3)+\cdots+(a_n+a_1)=2(a_1+a_2+\cdots+a_n)$$

當 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 時，上式等號成立。

10、設 A 棟大廈內的人年齡分別是 $a_1,a_2,\cdots,a_{70}\le 60$

設 B 棟大廈內的人年齡分別是 $b_1,b_2,\cdots,b_{60}\le 70$

可假設 $a_1+a_2+\cdots+a_{70}>b_1+b_2+\cdots+b_{60}$

今對於任一 $k\le 60$，皆可找到 $f(k)\le 70$ 使得

$a_1+a_2+\cdots+a_{f(k)-1}<b_1+b_2+\cdots+b_k\le a_1+a_2+\cdots+a_{f(k)}$

讓我們假設上式的等號不成立（否則原命題就成立了）

考慮 $C_k=(a_1+a_2+\cdots+a_{f(k)})-(b_1+b_2+\cdots+b_k)$

由前述要求知道

$$60\ge a_{f(k)}>C_k\ge 1, k\le 60 \qquad (k\in N)$$

即有 $60>C_k\ge 1, k\le 60$

因此有某兩個 C_m,C_n 相等 $(m<n\le 60)$

於是 $0=C_n-C_m=\sum_{k=f(m)+1}^{f(n)}a_k-\sum_{k=m+1}^{n}6_k$

也就是 $\sum_{k=f(m)+1}^{f(n)}a_k=\sum_{k=m+1}^{n}b_k$